Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17

2. Cvičení

1. Man zeige:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n$ und $3^n > n^2$.

b) Für $n = 2, 3, \dots$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.

e) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle 1 + \frac{n}{2} \le \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \le n + \frac{1}{2}$.

f) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

g) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

zu a)

Induktionsanfang: $n = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^0 = 1 > 0$ und $3^0 = 1 > 0^2 = 0$

Induktionsbehauptung: $\underbrace{2^n > n}_{Ind.Vor.}$ bzw. $\underbrace{3^n > n^2}_{Ind.Vor.} \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} > n+1$ bzw. $3^{n+1} > (n+1)^2$

Beweis der Induktionsbehauptung ($n \ge 1$):

$$2^n > n \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} > 2 \cdot n = n + n > n + 1 \quad \Rightarrow 2^{n+1} > n+1$$
$$3^n > n^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 3^n = 3^{n+1} > 3 \cdot n^2 = n^2 + n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \Rightarrow 3^{n+1} > (n+1)^2$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

zu b)

Induktionsanfang: $n = 2 \quad \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > 0$ denn $\displaystyle\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+1}} > 0$

Induktionsbehauptung:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}}_{Induktionsvoraussetzung} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$$

Beweis der Induktionsbehauptung ($n \ge 3$):

$$n > 0 \Rightarrow n^2 + n > n^2 \Rightarrow n(n+1) > n^2 \Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} > n \Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 > n + 1 \Rightarrow$$
$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

zu c)

Induktionsanfang: $n = 0 \qquad \Rightarrow (a-b)\sum_{k=0}^{0} a^k b^{0-k} = (a-b)a^0 b^{0-0} = (a-b)\cdot 1 = a^{0+1} - b^{0+1}$

Induktionsbehauptung ($n \geq 1$):

$$\underbrace{(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}}_{Induktionsvoraussetzung} \qquad \Rightarrow \qquad (a-b)\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n-k+1} = a^{n+2} - b^{n+2}$$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1} \Leftrightarrow b(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = ba^{n+1} - b^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$a^{n+2} - ba^{n+1} + b(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+2} - b^{n+2} \Leftrightarrow a^{n+1}(a-b) + b(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+2} - b^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$(a-b)\left[a^{n+1} + b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right] = a^{n+2} - b^{n+2} \Leftrightarrow (a-b)\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n-k+1} = a^{n+2} - b^{n+2}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

zu d)

Induktionsanfang: $n = 1 \qquad \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$

Induktionsbehauptung: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}_{Ind.Vor.} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

Beweis der Induktionsbehauptung ($n \geq 2$):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left(n^2 + 4(n+1)\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left(n^2 + 4n + 4\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 (n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 =$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

zu e)

Induktionsanfang: $n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}$

Induktionsbehauptung: $\underbrace{1+\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n+\frac{1}{2}}_{Induktionsvoraussetzung} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{n+1}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq n+1+\frac{1}{2}$

Beweis der Induktionsbehauptung ($n \geq 2$):

$1 + \frac{n+1}{2} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n-mal} \leq$ $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} + \frac{1}{2^n+2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$ (erster Teil)

$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = n + \frac{1}{2} +$ $\underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} + \frac{1}{2^n+2^n}}_{2^n-Summanden} \leq n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = n+\frac{1}{2}+\frac{2^n}{2^n} = n+1+\frac{1}{2}$

(zweiter Teil)

Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>zu f)</u>

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist es zu zeigen, dass $1 \leq 1$. Das ist offensichtlich wahr.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir setzen voraus, dass

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

gilt.

Wir wollen beweisen, dass dann auch

$$(n+1)! \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

Wir führen folgende Abschätzung durch:

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1)$$

Die Frage ist jetzt, ob

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$$

ist, oder äquivalent,

$$2(n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1},$$

oder ob

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Wir beweisen diese Ungleichung, in dem wir zeigen, dass

$$(\star) \qquad a_{n+1} \geq a_n \geq \ldots a_2 \geq a_1 = 2,$$

wobei $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

Wir schreiben

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Nach der Bernouschen Ungleichung ist das aber grösser als

$$\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Also gilt $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist auch $a_1 = 2$. Damit ist $(\star)$ bewiesen und der Induktionsschritt abgeschlossen.

zu g)

Induktionsanfang:

Es ist zu zeigen, dass

$$n = 1: \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

gilt. Das ist aber klar.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und wir setzen voraus, dass

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

gilt. Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Das folgt aus folgender Rechnung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Induktionsvoraussetzung, die zweite ist äquivalent zu

$$\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} \leq 2n+2$$

und die wieder zu

$$(2n+1)(2n+3) \leq (2n+2)^2$$

und die ist offensichtlich wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.$$

Wir beweisen die Aussage direkt:

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!} = n\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!}$$
$$= n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.$$

3. Beweisen Sie, dass die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

sogar für alle $x \geq -2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage direkt für alle $x \geq -2$ und $n = 1, 2$ und machen Sie dann den Induktionsschritt von n zu $n+2$.

Für $x \geq -2$ und $n = 1, 2$ ist es zu zeigen, dass

$$(1+x) \geq 1+x \quad \text{und} \quad (1+x)^2 \geq 1+2x.$$

gilt. Beide diese Aussagen sind aber offensichtlich wahr.

Wir setzen voraus, dass die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dann gilt auch

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= \underbrace{(1+x)^2}_{\geq 0}(1+x)^n \geq (1+x)^2(1+nx) = (1+2x+x^2)(1+nx) \\ &= 1+nx+2x+2nx^2+x^2+nx^3 = 1+(n+2)x+x^2(2n+1+x) \geq 1+(n+2)x.\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $2n+1+x \geq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -2$. Also stimmt die Aussage auch für $n+2$.

Man sollte sich noch überlegen, dass folgender "Satz" gilt:

Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$. Falls $1 \in \mathcal{A}$, $2 \in \mathcal{A}$ und

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n \in \mathcal{A} \implies (n+2) \in \mathcal{A},$$

dann gilt $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

4. Sei $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ und A und B beschränkt. Zeigen Sie, dass

a) $\sup(\{a+b : a \in A, b \in B\}) = \sup A + \sup B$,

b) $\inf(\{a-b : a \in A, b \in B\}) = \inf A - \sup B$,

c) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Gibt es eine Analogie zu c) für $\sup(A \cap B)$?

Zu a)

Sei α eine obere Schranke für A und β eine obere Schranke für B. Dann ist $\alpha + \beta$ eine obere Schranke für die Menge $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Wir setzen $\alpha = \sup A$ und $\beta = \sup B$ und sehen, dass $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke für $A+B$ ist. Es gilt also

$$\sup(\{a+b : a \in A, b \in B\}) \leq \sup A + \sup B.$$

Sei γ eine obere Schranke für $A+B$. D. h. $\gamma \geq a+b$ für alle $a \in A, b \in B$. Wir zeigen, dass $\gamma - \sup A$ eine obere Schranke für B ist. Falls $\gamma - \sup A$ keine obere Schranke für B wäre, dann müsste es ein $b \in B$ geben, so dass

$$\gamma - \sup A < b$$

ist, d.h. $\gamma < b + \sup A$. Also es müsste ein $a \in A$ geben, so dass $\gamma < b + a$ und das ist ein Widerspruch mit der Annahme, dass γ eine obere Schranke für $A+B$ ist. $\gamma - \sup A$ ist also obere Schranke für B. Setzt man jetzt $\gamma = \sup(A+B)$, erhällt man die Aussage.

Zu b)

b) folgt aus a):

$$\begin{aligned}\inf(\{a-b : a \in A, b \in B\}) &= -\sup(\{-a+b : a \in A, b \in B\}) \\ &= -\sup(\{a+b : a \in (-A), b \in B\}) \\ &= -[\sup(-A) + \sup B] = \inf A - \sup B.\end{aligned}$$

Zu c) Die Aussage beweisst man durch Fallunterscheidung ($\sup A \geq \sup B$ und $\sup A < \sup B$).

Es gibt keine Analogie für den Fall $\sup(A \cap B)$, insbesondere kann $A \cap B = \emptyset$ sein.

5. Sei M eine nicht-leere Menge und $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ seien beschränkte Funktionen, d.h. $f(M) \subset \mathbb{R}$ und $g(M) \subset \mathbb{R}$ sind beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$(\spadesuit) \qquad \begin{aligned} \sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) &\le \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x), \\ \sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) &\ge \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x), \\ \sup_{x\in M}(f(x)-g(x)) &\le \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x). \end{aligned}$$

Gilt in ($\spadesuit$) allgemein auch die Umgekehrte Ungleichung?

Zu ($\spadesuit$):

Sei $a = \sup\limits_{x\in M} f(x), b = \sup\limits_{x\in M} g(x)$. Für alle $x \in M$ gilt also $f(x) \le a$ und $g(x) \le b$. Für alle $x \in M$ gilt also auch $f(x) + g(x) \le a + b$. D. h. $a + b$ ist eine obere Schranke der Menge $\{f(x) + g(x) : x \in M\}$, ist also größer (oder gleich) als Supremum dieser Menge.

Zweite Ungleichung:

Sei diesmal $a = \sup\limits_{x\in M} f(x), b = \inf\limits_{x\in M} g(x)$.

$\forall \epsilon > 0\ \exists x = x_\epsilon \in M : f(x_\epsilon) > a - \epsilon$.

Insgesamt gilt:

$$\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) \ge f(x_\epsilon) + g(x_\epsilon) > a - \epsilon + b.$$

Für jedes $\epsilon > 0$ gilt also $\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) > a + b - \epsilon$, d.h. $\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) \ge a + b$.

Die dritte Ungleichung folgt aus ($\spadesuit$) wenn man $-g(x)$ statt $g(x)$ schreibt.

Die Ungleichung in ($\spadesuit$) kann echt sein. Z. B.

$$1 = \sup_{x\in[0,2\pi]}(\sin^2 x + \cos^2 x) < \sup_{x\in[0,2\pi]} \sin^2 x + \sup_{x\in[0,2\pi]} \cos^2 x = 2.$$

6. Man beweise:

a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

b) Die Menge aller endlichen Folgen von $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar.

c) Die Menge aller Folgen, die nur die Elemente 0 und 1 enthalten, ist nicht abzählbar.

Zu a)

Wir müssen die Menge

$$M = \{A \subset \mathbb{N} : A \quad \text{ist endlich}\}$$

in eine Folge ordnen. Das kann man z.B. so machen:

Wir betrachten die Funktion φ, die zu jeder endlichen Menge $A \subset \mathbb{N}$ die Summe ihrer Elemenenten zuordnet. Z. B. $\varphi(\{2, 5, 7\}) = 14$. Man überlegt sich, dass folgende Aussage wahr ist:

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es nur endlich viele Mengen $A \in M$, so dass $\varphi(A) = n$ ist.

Anders gesagt,

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{A \in \mathbb{N} : \varphi(A) = n\}$$

und die Vereinigung auf der rechte Seite ist disjunkt und alle Mengen auf der rechte Seite sind endlich. Jetzt sind wir schon fast fertig. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kann man M_n in eine endliche Folge umordnen, und diese endliche Folgen dann hintereinander schreiben.

$$\begin{aligned}
M_0 &: \quad \emptyset \\
M_1 &: \quad \{1\} \\
M_2 &: \quad \{2\} \\
M_3 &: \quad \{1,2\}, \{3\} \\
M_4 &: \quad \{1,3\}, \{4\} \\
M_5 &: \quad \{1,4\}, \{2,3\}, \{5\} \\
M_6 &: \quad \{1,2,3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{6\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und die Ordnung von M ist dann

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{5\}, \{1,2,3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{6\}$$

Zu b)

Wir modofizieren den Beweis aus a).

Für jede endliche Folge a bezeichnen wir mit $\ell(a)$ ihre Läunge. D. h. $a_{\ell(a)} \neq 0$, aber $a_n = 0$ für alle $n > \ell(a)$. Z. B. $\ell(1,0,2,0,0,0,\dots) = 3$.

Statt φ aus a) betrachten wir jetzt die Funktion ψ, die jeder endlichen Folge a die Summe ihrer Elementen und $\ell(a)$ zuordnet. Z. B. ist

$$\psi(1,0,2,0,0,0,\dots) = 1+2+3 = 6.$$

Genau wie in a) kann man dann die Menge aller endlichen Folgen in eine disjunkte Vereinigung endlicher Untermengen zerlegen:

$$N = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 : a \quad \text{endlich}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0, \psi(a) = n\}.$$

Man überlegt sich wieder, dass alle Mengen N_n endlich sind und daher N abzählbar ist.

Zu c)

Wir benutzen das Diagonalverfahren von Cantor. Wir setzen voraus, dass das möglich *ist*, die Mengen aller Folgen, die nur aus 0 und 1 bestehen, in eine Folgen umzuordnen:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}, \dots), \\
f_2 &= (f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{2,4}, \dots), \\
f_3 &= (f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, f_{3,4}, \dots), \\
f_4 &= (f_{4,1}, f_{4,2}, f_{4,3}, f_{4,4}, \dots), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

wobei $f_{i,j} \in \{0,1\}$ für alle $i,j \in \mathbb{N}$ ist.

Wir definieren eine neue Folge $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, \dots)$ durch

$$g_j = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad f_{j,j} = 1, \\ 1, & \text{falls} \quad f_{j,j} = 0. \end{cases}$$

Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, dass $g_j \neq f_{j,j}$, also auch $g \neq f_j$.

Die Folge g besteht also aus 0 und 1, ist aber unterschiedlich von allen $f_j, j \in \mathbb{N}$ - ein Widerspruch.

7. Man beweise:

   a) Für alle $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

   b) Falls $n \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

   Zu a)

   Beide Ungleichungen beweisst man direkt durch Quadrieren:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

   ist äquivalent zu

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

   und das zu

$$2(a^2+b^2) \geq a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$$

   und das wieder zu

$$(a-b)^2 \geq 0 \geq -(a-b)^2.$$

   Zu b)

   Wir nehmen an, dass $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, wobei $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$ und p und q teilerfremd sind. Dann ist aber $n = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = nq^2$. Falls alle Primzahlen in der Primzahl-Zerlegung von n mit einer geraden Potenz vorkommen, dann ist $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl.

   Falls eine Primzahl in dieser Zerlegung mit ungerader Potenz vorkommt, bezeichnen wir sie mit $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann ist p^2 durch α teilbar, und (weil die Potenz von α ungerade war), auch q. Das ist aber Widerspruch damit, dass p und q teilerfremd sind.

8. Geben Sie eine Formel für $f \circ f$ und $f \circ f \circ f$, falls $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

   Wir setzen für x wieder $f(x)$, und bekommen

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

   and

$$(f \circ f \circ f)(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = x.$$