Matematická analýza pro fyziky

ZS 2016/17, MFF UK

9. Cvičení

---

1. Určete horní a dolní součty funkce $f(x) = x^2$ pro rovnoměrné rozdělení intervalu $[0, a]$. Spočtěte takto integrál $\int\limits_0^a x^2 \, dx$.

2. Spočtěte : a) $\int\limits_0^{\ln 2} x\, e^{-x} dx$ b) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$ c) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ d) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx$

   <u>*Návod*</u> *: V* **d)** *použijte substituci* $t = x + \frac{1}{x}$.

3. Pomocí Riemannova integrálu spočtěte:
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

4. Spočtěte

   a) $\displaystyle\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$ *b)* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\; dx$

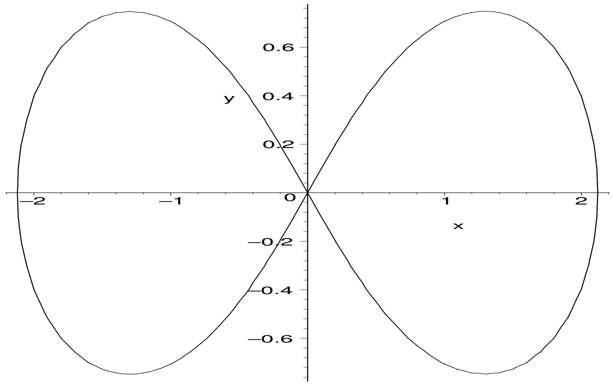
   c) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$ *d)* $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\; dx$

5. Riemannova funkce
   Buď $R(x) = 0$ pokud x je iracionální, a $f(x) = \dfrac{1}{q}$ pokud $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ a p, q nesoudělné.) Ukažte, že R je na $[0, 1]$ riemannovsky integrovatelná.

6. Spočtěte plochu množiny ohraničené křivkou
$$\mathcal{K} := \Big\{(x, y) : \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1\Big\}.$$
   Udělejte si nejprve obrázek. Tato křivka se nazývá asteroida.
   Návod: Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí
$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \, \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \,.$$

7. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů:
$$a) \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + x}}, \qquad b) \int_0^\infty x^n e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x, \qquad c) \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \qquad d) \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t} \mathrm{d}t.$$

8. (i) Spočtěte plochu *elipsy*
$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}, \quad a, b > 0.$$
   (ii) Spočtěte plochu ohraničenou *Bernoulliho lemniskátou*:
$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\right\}, \quad a > 0.$$
   Návod:



Odvoďte parametrické vyjádření v polárních souřadnicích.

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}, \quad r \in (0, \sqrt{2}a).$$

Integrujte pak od nuly do $\sqrt{2}a$ délku paprsku, který je omezen lemniskátou, tedy $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)\mathrm{d}r$.

9. Ukažte, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = 1.$$

10. Buď $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ dána.
   (i) Plyne z $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?
   (ii) Plyne z $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy existence limity $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$?
   (iii) Buď f navíc stejnoměrně spojitá. Plyne pak z $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

11. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů

$$a)\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx \qquad b)\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx \qquad c)\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)\arctan x}{x}dx \qquad d)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}.$$

12. Spočtěte

$$a)\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \qquad b)\int_0^1 \ln x\; dx \qquad c)\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\; dx \qquad d)\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\; dx.$$

13. Buď f spojitá na $[0,\infty)$, a nechť existuje $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. Dokažte, že pak $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A$.