Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

8. Cvičení

---

1. Nechť $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$

   Ukažte, že f je v $x = 0$ diferencovatelná a má tam lokální minimum. Dále ukažte, že neexistuje okolí 0, na kterém je $f'(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f'(x) > 0$ pro $x > 0$.

2. Vypočtěte co možná nejefektivněji Taylorovy polynomy n-tého řádu následujících funkcí se středem v $x_0 = 0$:

   a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $n = 5$ *b*) $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$, $n = 4$

   c) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $n = 5$

3. a) Pro která x platí přibližná formule $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ s chybou nejvýše $0,00005$?

   b) Vypočtěte $\cos 5$ s chybou menší než 10^{-5}.

   c) Ukažte, že se hodnoty $\sin(\alpha + h)$ a $\sin\alpha + h\cos\alpha$ pro všechna α liší nejvýše o $\dfrac{h^2}{2}$.

4. Diskutujte průběh funkce (definični obor, spojitost, diferencovatelnost, průsečíky se souřadnými osami, chování v nekonečnu a na krajích definičního oboru, monotonie, extrémy, konvexita, obor hodnot, obrázek)

   $$a)\quad f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2} \qquad\qquad b)\quad f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

5. Ukažte, že funkce $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ je na $\mathbb{R}$ nekonečněkrát diferencovatelná. Rozviňte tuto funkci v Taylorovu řadu u 0 a vyšetřete její konvergenci.

6. Vypočtěte koeficient u x^7 v Taylorově rozvoji funkce $f(x) = \tan x$ u 0.