

5. Cvičení

1. Dokažte, že je-li $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\pi$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ a $u = \tan \frac{x}{2}$, pak platí

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

2. Najděte primitivní funkci k f pomocí parciální integrace :

$$\text{a) } f(x) = x^2 \sin(2x) \quad \text{b) } f(x) = x^3 e^{-x^2} \quad \text{c) } f(x) = \ln^2 \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \quad \text{d) } f(x) = \cos(\ln x)$$

3. Najděte primitivní funkce k f :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} & \text{b) } f(x) &= \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \quad [z = \cos x] & \text{c) } f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) \sqrt[4]{x^3}} \quad \left[t = \sqrt[4]{x^3}\right] \\ \text{d) } f(x) &= x(1-x)^{10} & \text{e) } f(x) &= \cos^5 x \sqrt{\sin x} \quad [w = \sin x] & \text{f) } f(x) &= \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad [u = \ln(\ln x)] \end{aligned}$$

Návod : Můžete použít navržených substitucí $[\cdot]$.

4. Najděte primitivní funkci k následujícím funkcím

$$f_1(x) := x(1-x)^{10}$$

$$f_2(x) := \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}}$$

$$f_3(x) := \frac{x^3}{x^8-2}$$

$$f_4(x) := \sin(5x-y) - \sin(5y-x)$$

$$f_5(x) := \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$f_6(x) := \frac{1}{16-x^4}$$

$$f_7(x) := \frac{1}{x^2+6x+34}$$

$$f_8(x) := \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

$$f_9(x) := \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+5}}$$

$$f_{10}(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

5. Najděte primitivní funkci k

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

Zohledněte, na kterém intervalu (a, b) příslušné výpočty platí.

6. Najděte primitivní funkci k

$$f_1(x) := \frac{1}{x^4-1}$$

$$f_2(x) := \frac{x+1}{x^4-x}$$

$$f_3(x) := \frac{\log^4 x - 1}{x(\log^3 x + 1)}$$

$$f_4(x) := \frac{x^7}{x^4+2}$$

$$f_5(x) := x \arctan x$$

$$f_6(x) := \frac{1}{1+\sin x + \cos x}$$

7. (i) Necht $R = R(u, v)$ je racionální funkce v u a v . Buďte $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$. Ukažte, že primitivní funkci k

$$f(x) := R(x, \sqrt[n]{ax+b})$$

lze vždy najít pomocí substituce

$$t := \sqrt[n]{ax+b}$$

- (ii) Najděte primitivní funkci k

$$f(x) := x^2 \sqrt[3]{3x+1}.$$

8. Integrujte následující funkce:

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} \qquad b) \quad f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} \qquad d) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$e) \quad f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \qquad f) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$$

$$g) \quad f(x) = \frac{x}{x^3 + 1} \qquad h) \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$i) \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

9. Spočtěte primitivní funkci k

$$f(x) := \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

Návod: Použijte substituci, která vede k vymizení všech odmocnin.

10. Spočtěte primitivní funkci k

$$f(x) := \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

11. Buď

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že

(i) f je spojitá,

(ii) f je diferencovatelná,

(iii) f *není* spojitě diferencovatelná.

Tedy je f' nespojitá funkce, která má primitivní funkci.