Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

3. Cvičení

---

1. Ukažte, že pro kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Rightarrow x_1 + \ldots + x_n \geq n$$

   Návod: Abyste dokázali výrok pro $x_1, \ldots, x_{n+1}$, předpokládejte, že $x_n < 1$ a $x_{n+1} > 1$ (proč to lze?) a použijte indukční předpoklad na $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$.

2. Artitmetický průměr nezáporných čísel $x_1, \ldots, x_n$ je $a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, geometrický průměr je $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ a harmonický průměr $h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}}$.
   Dokažte, že $a \geq g \geq h$
   Návod: Použijte, že $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n = 1 \Rightarrow y_1 + \ldots + y_n \geq n$ pro kladná y_i.

3. Dokažte pro (komplexní) čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ Cauchy-Schwarzovu nerovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \sqrt{\sum |a_k|^2} \sqrt{\sum |b_k|^2}$$

   Návod: Ověřte pro $A_k = \frac{|a_k|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2}}$ a $B_k = \frac{|b_k|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^2}}$ nerovnost $\sum A_k B_k \leq 1$.
   Použijte přitom skutečnost, že geometrický průměr lze shora odhadnou aritmetickým průměrem.

4. Dokažte pro čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ Minkowského nerovnost

$$\sqrt{\sum |a_k + b_k|^2} \leq \sqrt{\sum |a_k|^2} + \sqrt{\sum |b_k|^2}$$

   Návod: Rozložte součet pod levou odmocninou na dva součty a použijte Cauchy-Schwarzovu nerovnost.

5. Buď $\theta \neq 2k\pi$.
   Dokažte identitu

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{n\theta}{2}$$

   a

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

   Návod: Rozepište $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-1k\theta}$.

6. Najděte všechna reálná čísla x s

$$1 - \sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$$

7. Spočtěte následující komplexní čísla:

   a) $z = (-\sqrt{5} + i\sqrt{5})^3 (1 + i)^2$

   b) $z = \dfrac{(-1 + 4i)^2}{5 - 2i}$

c) $z = \left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2$

d) $z = \frac{125}{(2+i)^3} + (1+i)^8 - 7i$

e) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3 \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^3$

8. Načrtněte v Gaußovské rovině následující množiny komplexních čísel:
   a) $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| - \overline{z} = 1 + 2i\}$ **b)** $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - 1 + i| = |z - 3 - 5i|\}$
   c) $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re\mathbf{e}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 2\right\}$ **d)** $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \leq 1\,,\ \left|z - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\right\}$
   e) $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - 1 - i| = 2|z + 1 + i|\}$ **f)** $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| > 1 - \Re\mathbf{e}(z)\}$.

9. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z, w \in \mathbb{C}$ platí tak zvaná rovnoběžníková identita
$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$
   Jaká geometrická věta se za ní skrývá?

10. Převeďte následující výrazy na trigonometrický tvar $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:
    a) $(1 + \sqrt{3}i)(1 + i)(\cos a + i\sin a)$, $a \in \mathbb{R}$ b) -5 c) $i + \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$, $0 \leq \alpha < \pi$

11. Řešte rovnice pro $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$:
    a) $z^3 = i$ b) $z^6 = -27$ c) $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ d) $z^2 + 2 = 0$
    e) $z^2 + 2z + (1 - 8i) = 0$ f) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$ g) $z^2 = 3 + 4i$ h) $z^2 = 5 - 12i$

12. Spočtěte přesnou hodnotu $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\sin\frac{\pi}{5}$.

    Návod: Položte $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ a použijte $z^5 + 1 = 0$ stejně jako $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{5}$.

13. Načtrněte v $\mathbb{C}$ následující množiny

    a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 1|\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 1| = |z^2 - 1|\}$,
    d) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 2|z - 2|\}$, e) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z + 2) \geq \mathrm{Im} z\}$.

14. Udejte trigonometrickou reprezentaci čísel
$$\text{a)}\ \frac{1+i}{2},\quad \text{b)}\ \left(\frac{1+i}{2}\right)^2,\quad \text{c)}\ \left(\frac{1+i}{2}\right)^{30},\quad \text{d)}\ \frac{(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}+i)^{24}}.$$
    Najděte reálnou a imaginární část a absolutní hodnotu
$$\text{e)}\ \frac{1+i}{1-i},\quad \text{f)}\ \frac{1}{i},\quad \text{g)}\ \frac{i + \frac{1}{1+i}}{i + \frac{1}{1-i}}.$$

15. Budiž z_1, z_2, z_3 komplexní čísla s vlastnostmi
$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$
    a
$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$
    Ukažte, že z_1, z_2, z_3 jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.
    Návod: Použijte
$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$