Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

2. Cvičení

---

1. Dokažte:

   a) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $2^n > n$ a $3^n > n^2$.

   b) Pro $n = 2, 3, \ldots$ platí: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

   c) Pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí: $\displaystyle(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$.

   d) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.

   e) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\displaystyle 1 + \frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1}{2}$.

   f) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\displaystyle n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

   g) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

2. Dokažte pro všechna $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} = n2^{n-1}.$$

3. Dokažte, že Bernoulliho nerovnost
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$
   platí dokonce pro všechna $x \geq -2$ a $n \in \mathbb{N}$.

   Nápověda: Dokažte přímo, že nerovnost platí pro všechna $x \geq -2$ a $n = 1, 2$ a proveďte indukční krok od n k $n+2$.

4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ a A a B jsou omezené. Ukažte, že

   a) $\sup(\{a + b : a \in A, b \in B\}) = \sup A + \sup B$,

   b) $\inf(\{a - b : a \in A, b \in B\}) = \inf A - \sup B$,

   c) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

   Existuje analogie k c) pro $\sup(A \cap B)$?

5. Nechť M je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ budiž omezené funkce, t.j. $f(M) \subset \mathbb{R}$ a $g(M) \subset \mathbb{R}$ jsou omezené. Dokažte, že
$$(\spadesuit) \qquad \begin{aligned} \sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) &\leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x), \\ \sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) &\geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x), \\ \sup_{x\in M}(f(x)-g(x)) &\leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x). \end{aligned}$$

   Platí v ($\spadesuit$) obecně i opačná nerovnost?

6. Buď A, B, C libovolné výroky. Dokažte, že výroky
   a) $[(A\&B) \vee C] \Leftrightarrow [(A \vee C)\&(B \vee C)]$
   b) $[(A \vee B)\&C] \Leftrightarrow [(A\&C) \vee (B\&C)]$
   c) $[(\neg A \implies B)\&(\neg B)] \implies A$
   jsou vždy pravdivé.

7. Dokažte, že $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ mají stejnou mohutnost - tedy zkonstruujte bijektivní zobrazení mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$.

8. Dokažte:

   a) Množina všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$ je spočetná.

   b) Množina všech konečných posloupností přirozených čísel je spočetná.

   c) Množina všech (nekonečných) posloupností s prvky 0 a 1 není spočetná.

9. Dokažte:

   a) Pro všechna $a, b \geq 0$ platí $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

   b) Pokud $n \in \mathbb{N}$ a $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, pak je i $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

10. Udejte předpis pro $f \circ f$ a $f \circ f \circ f$, pokud $f(x) = \frac{1}{1-x}$.