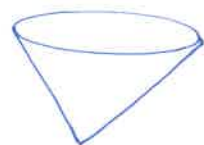


Pr. Nocht zj Riemannova metrika na

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$



induktorne z  $\mathbb{R}^3$ . Vypočítajte vyjadrenie  $g$  v lokálnych súradniciach

$$x = u \cdot \cos v, \quad y = u \cdot \sin v, \quad z = u, \quad u \in (0, +\infty) \text{ a } v \in (-\pi, \pi).$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \phi(u, v) & \frac{\partial \phi}{\partial u} &= (\cos v, \sin v, 1) \\ & & \frac{\partial \phi}{\partial v} &= (-u \cdot \sin v, u \cdot \cos v, 0) \end{aligned}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

- Riemannova metrika  $g = 2 du^2 + u^2 dv^2$   
1. fundament. forma
- objemová forma  $\omega = \sqrt{2} u \, du \, dv$
- integrál 1. druhu

$$\int_K f \, dS = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi(u, v)) \sqrt{2} u \, du \, dv$$

Lieova algebra je vektorový prostor  $L$  s  
bilineární operací (m. závorekou)

$[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$ , která splňuje ①, ②.

Pr. Některá  $A$  je asociativní algebra.

Pro každé  $a, b \in A$  definujeme její komutátor  
 $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$

(tj. uvaž, jak je nekomutativní součin  $a \cdot b$ ).

Potom  $(A, [\cdot, \cdot])$  je Lieova algebra.

Pr. Některá  $gl(n, \mathbb{R})$  je algebra všech reálných  
matic  $n \times n$  s maticovým operováním.

Potom  $(gl(n, \mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$  je Lieova algebra.

Zde  $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$ ,  $A, B \in gl(n, \mathbb{R})$ .

Pr. Na  $\mathbb{R}^3$  můžeme hledat vektorové pole

$h_{ij} := x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq 3$ . Zde  $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$

zřejmě  $h_{ji} = -h_{ij}$  a  $[h_{12}, h_{23}] = h_{31}$ ,  $[h_{23}, h_{31}] = h_{12}$ ,  
 $[h_{31}, h_{12}] = h_{23}$ . Některá  $so(3)$  je podprostor  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$   
generovaný  $h_{ij}$ ,  $i \neq j$ . Potom  $so(3)$  s Lieovou závor-  
kou je 3-dim. (m. ortogonální) Lieova algebra.

Pom:  $\forall v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  we  $\mathbb{R}^n$   
 $x \in \mathbb{R}^n$   
 $x = (x_1, \dots, x_n)$  pro nejaké  $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Prüfung:  $[A, B] := A \circ B - B \circ A \quad (*)$

(i)  $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$

Skutocne,  $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f$ .

Porovname definicou (\*) i pro jine operatory ne vied. funkci. Potom

(ii)  $[x_i, x_j] = 0$ , kde  $x_i$  chersme jako operatory neobcou  $x_i$

(iii) ~~\*\*\*~~  $[\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij} \quad *)$

Skutocne,  $\partial_{x_i} x_i f = x_i \partial_{x_i} f + f$

Potom  $h_{12} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}$ ,  $h_{23} = x_3 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_3}$

$[h_{12}, h_{23}] = [x_2 \partial_{x_1}, x_3 \partial_{x_2}] + [x_1 \partial_{x_2}, x_2 \partial_{x_3}] =$   
 $= -x_3 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_3} = h_{31}$

protoro  $\underbrace{x_2 \partial_{x_1}}_A \underbrace{x_3 \partial_{x_2}}_B = x_3 \underbrace{x_2 \partial_{x_2}}_{\approx 1} \partial_{x_1} = x_3 (\partial_{x_2} x_2 - 1) \partial_{x_1}$

$= \underbrace{x_3 \partial_{x_2}}_B \underbrace{x_2 \partial_{x_1}}_A - x_3 \partial_{x_1}$

\*) Pozn: (i)–(iii)  
 jsou tzv. kanonické  
komutace relace  
 v Heisenberg mechanice

# Lieon grupy

LIE 1

DEF. Lieon grupa  $G$  je grupa a takzwa kladka  
na wata takow, ze grupow opow

\* wielobow :  $G \times G \rightarrow G$   
 $(a, b) \rightarrow a \cdot b$

\* inwers :  $G \rightarrow G$   
 $a \rightarrow a^{-1}$

jeon kladka. Pom: Na  $T_0 G$  mamy tm Lieon algebr  $G$ .

(i)  $GL(n) := \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$   
ogocna linearna grupa, wielobow matric

(ii)  $SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$   
specjalna linearna grupa

(iii)  $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = E\}$   
ortogonalna grupa  $\uparrow$   $\uparrow$  jednostkowa matrica  
transponowana  $A$

(iv)  $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$   
 $\det A = \pm 1$   $> 0$   
specjalna ortogonalna grupa

Wzbadaj tyto matricow grupy choczone jako  
podprzostory  $\mathbb{R}^{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  s Euklidesowem topologu

# Maturové opency

L/E 1.1

① Násobení:  $A \cdot B = C$  s prvky

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

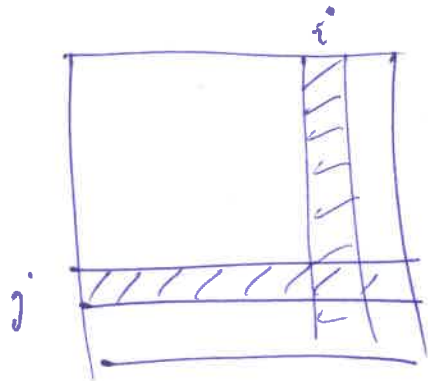
② Inverze: z Cramerova pravidla máme

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A),$$

Kde  $B := \operatorname{adj}(A)$  je adjungovaná matice k  $A$ ,  
m. matice s prvky  $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(j|i))$ ,

$(j|i)$  - minor  $A$

Zde  $A(j|i)$  je matice  $A$  bez  
 $j$ -tého řádku a  $i$ -tého sloupce.



(Pr.)  $GL(n)$  je klad. množina dim  $n^2$

LE2

prostor  $GL(n)$  je otvorená podmnožina  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Skutečně,  $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojité, dokonce kladné.  
Máme totiž

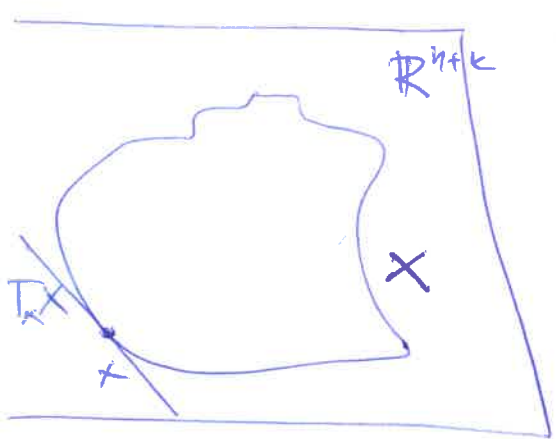
$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

- Nane  $T_A GL(n) \simeq \boxed{\mathbb{R}^{n \times n} =: \mathfrak{gl}(n)}$  je komutatorům  
je Lieova algebra.
- Grupy operací jsou lineární, viz (1), (2) ve sdh. LE 1.1

Propozice: Hladká plocha zadaná implicitně

Necht  $\phi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  je hladká,

$X := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \phi(x) = 0\}$  a hodnost  $D\phi$  na  $X$  je rovna  $k$ . Potom  $X$  je hladká plocha a



$\mathbb{R}^{n+k}$  dim  $n$  a  $\forall x \in X$ :

$$T_x X = \text{Ker } D\phi(x),$$

kde  $D\phi(x): \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  je lineární  
 $D\phi(x)$

(Pr.)  $G := \boxed{SL(n)}$  je kladke rovnice plochy v  $\mathbb{R}^{n^2}$  LIE3

dim  $(n^2-1)$ , protože  $\phi := \det - 1 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

je kladke funkce a  $\forall \phi \neq 0$  je  $G$ ,

strukturní, neboť  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in G$ . Potom

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{d}{dt} (\det(A + tE_{ij})) \Big|_{t=0}$$

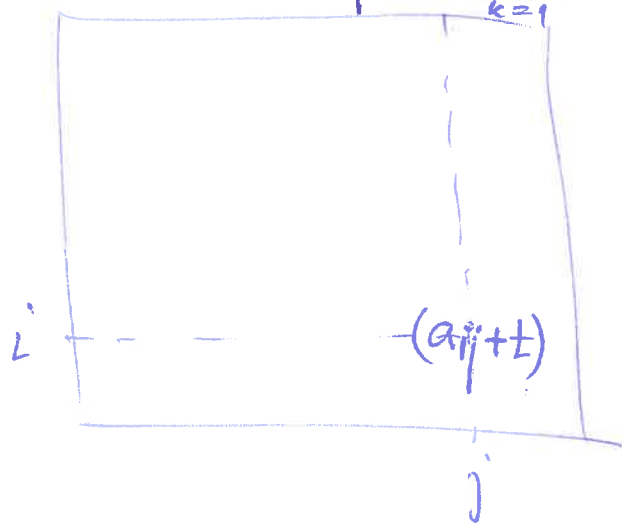
②  $(i,j)$ -minor  $A$

$$= \det(A(i,j)) \cdot (-1)^{i+j},$$

kde  $E_{ij}$  je matice  $n \times n$  s 1 ve místě  $ij$  a 0 jinde a  $A(i,j)$  je matice  $A$  bez  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce.

Remark ② plyne z toho, že  $\det$  dle  $j$ -tého sloupce  $\det(A + tE_{ij}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} (a_{kj} + \delta_{ki}t)$ .

$$\det(A(k,j)).$$



Protože  $\det A \neq 0$ , ex.  $ij$  taková, že

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_{ij}}(A) = (-1)^{i+j} \det(A(i,j)) \neq 0.$$

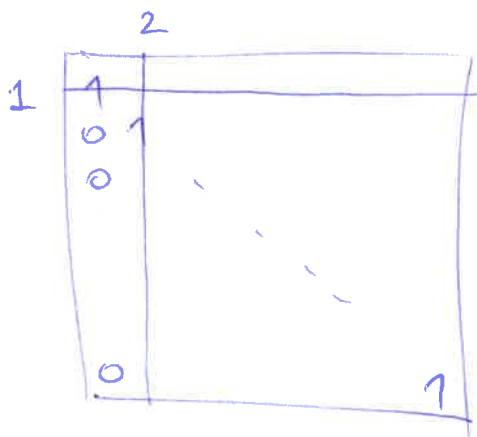
Maine, do  
protoro

$$\phi(E)B = \text{tr } B, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

LE 4

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_{ij}}(E) = (-1)^{i+j} \det(E(i|j))$$

$$= (-1)^{i+j} \delta_{ij} = \delta_{ij} \quad a$$



$$\begin{aligned} \phi(E)B &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \delta_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ii} =: \text{tr } B, \quad \text{tr.} \\ &\quad \text{stopa } B \end{aligned}$$

Tady  $T_E \mathfrak{g} = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr } B = 0 \right\} =: \mathfrak{sl}(n)$   
komutatorom je Lieova algebra.

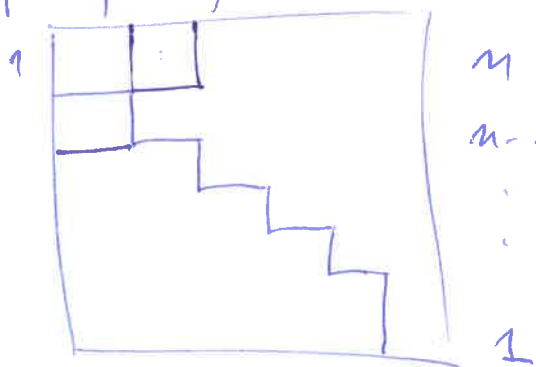
×

$\phi_{\text{tr}}$   $\mathfrak{g} := \left[ \mathcal{O}(n) \right]$  je kladke matice dim  
 $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ . Skutocne, o matice  $S(n, \mathbb{R}) = S(n)$

uvazujeme i symetrickou metricu v  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,

tr.  $S(n, \mathbb{R}) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = A \}$ . Potom

$S(n, \mathbb{R})$  je podprostor  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dimenze  $k := \frac{n(n+1)}{2}$



n

n-1

⋮

1

$$k = n + (n-1) + \dots + 1$$

Zvrhneť je  $\phi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^k$  LIEr  
 definujeme jako  $\phi(A) := A^t A - E$ ,  
 kladko a  $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$D\phi(A)(B) = \frac{d}{dt} \left( (A + tB)^t (A + tB) - E \right) \Big|_{t=0}$$

$\nwarrow$  LEPE: s msto t?

$$= B^t A + A^t B.$$

Nechť  $A \in O(n)$ . Potom  $D\phi(A): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$   
 je me, protože  $\forall C \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ :

$$D\phi(A)\left(\frac{1}{2}AC\right) = \frac{1}{2} \underbrace{C^t A^t A}_{C} + \underbrace{A^t A C}_{E} \cdot \frac{1}{2} = C.$$

Proč  $D\phi(E)(B) = B^t + B$ , máme

$$T_E \mathcal{G} = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B^t = -B \right\} =: \mathcal{O}(n)$$

antisymetrické  
matrice

s komutativitou je Lieova algebra.

①  $\mathcal{G} := \boxed{\mathfrak{so}(n)}$  je obecně podalgebra  
 $\mathcal{O}(n)$ , proto je  $\mathcal{G}$  stejné jako  $\mathcal{O}(n)$  klad.  
 rovnost dim.  $n(n-1)/2$  a  $T_E \mathcal{G} = \mathcal{O}(n)$ .  
 skutečně,  $\mathfrak{so}(n) = \{ A \in \mathcal{O}(n) \mid \det A > 0 \}$ .  
 $\det A = \pm 1$

②  $\mathcal{O}(n)$  a  $\mathfrak{so}(n)$  jsou kompaktní.