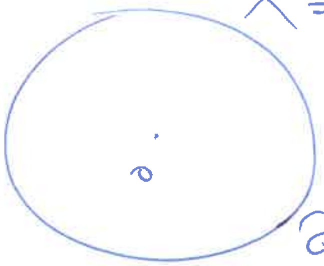
VARIETY S OKRAJEM

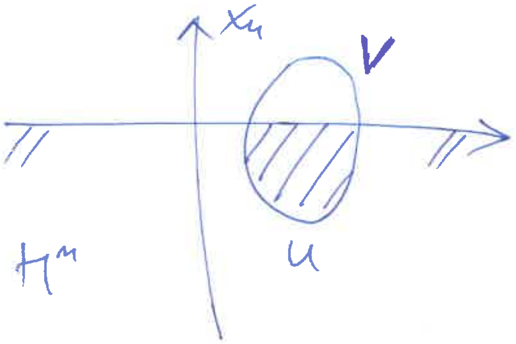
CÍL: Dokázat Stokesovu větu pro variety. Připustíme proto i variety s okrajem (= "hranicí").

Př. $X =$ uzavřený kruh v $\mathbb{R}^2$



$\partial X = S^1 \ldots$ okraj

Značení: (i) Položme $H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$.
uzavřený poloprostor



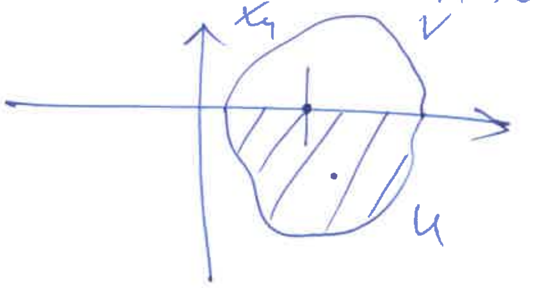
Chápeme H^n jako topologický podprostor $\mathbb{R}^n$, tzn. $U \subset H^n$ je otevřená, právě když

$$U = V \cap H^n$$

pro nějakou otevřenou $V \subset \mathbb{R}^n$.

Zřejmě $\partial H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ lze ztotožnit s $\mathbb{R}^{n-1}$.
hraniční nadrovina

(ii) V souladu s naší úmluvou říkáme, že $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je hladké zobrazení na otevřené $U \subset H^n$, ex.-li otevřená $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset V$ a ex.-li hladké $\bar{f}: V \to \mathbb{R}^m$ tak, že $f = \bar{f}|_U$. Vzhledem derivace f na U definujeme jako derivace $\bar{f}$. Zřejmě derivace f nezávisí na volbě rozšíření $\bar{f}$.



x

Nechť $U, V \subset H^n$ jsou otevřené. Nechť $f: U \xrightarrow{na} V$ je prosté. Potom je f difeomorfismus U na V, pokud f i f_{-1} jsou hladké.

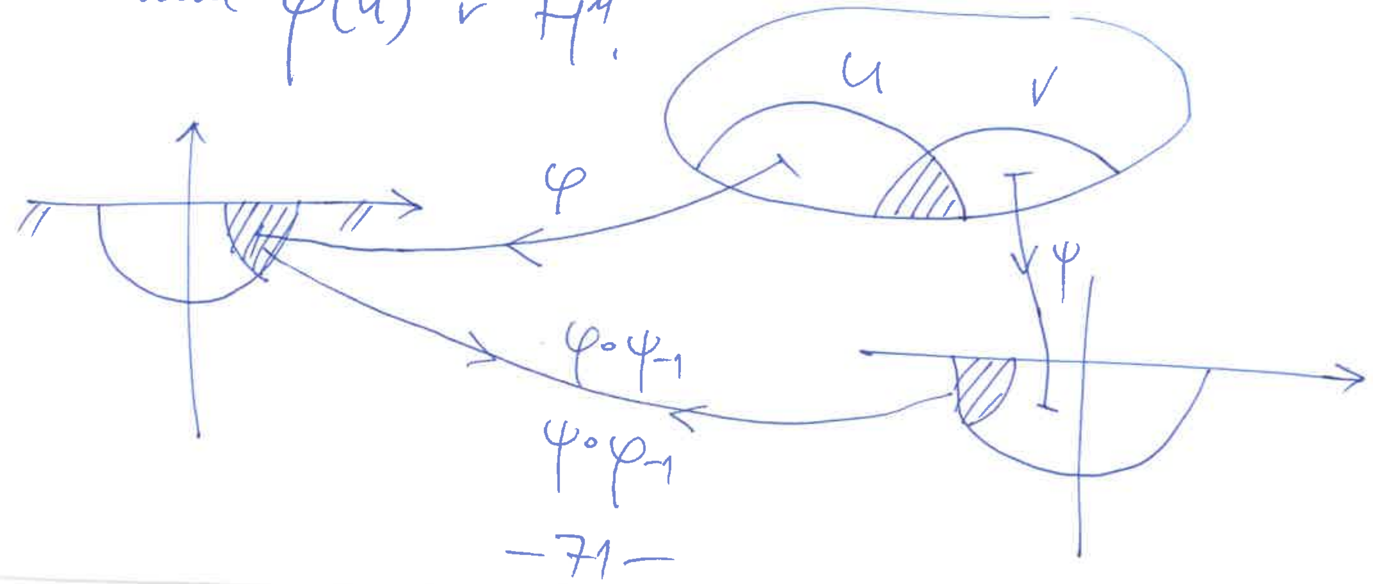
tzv. lokální model

x

Varieta s okrajem lokálně vypadá jako H^n, jinak se definuje stejně.

Nechť X je topologický prostor a $n \in \mathbb{N}$.

(i) n-dimenzionální mapou na X nazveme dvojici (U, φ), kde $U \subset X$ je otevřená a φ je homeomorfismus U na otevřenou množinu $\varphi(U)$ v H^n.



(ii) n-dim. mapy (U,φ) a (V,ψ) na X jsou kompatibilné, pokud buď $U\cap V=\emptyset$, anebo $U\cap V\neq\emptyset$ a $\varphi\circ\psi^{-1}$, $\psi\circ\varphi^{-1}$ jsou hladké na svých definičních oborech (difeomorf.)

(iii) (Hladký) n-dimenz. atlas na X je systém kompatibilních n-dimen. map na X

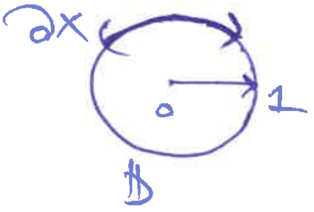
$$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A},$$

který pokrývá X, tzn. $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$.

Pozn: Každý atlas $\mathcal{A}$ na X je obsažen v jednom maximálním atlasu $\tilde{\mathcal{A}}$ na X.

DEF. (Hladkou) n-dimenz. varietou s okrajem nazveme topolog. prostor X, který je Hausdorff., má spočetnou bázi otevřených množin a na kterém je zadán maximální n-dimenz. atlas $\tilde{\mathcal{A}}$, tzn. diferenciál. struktura.

Pozn: ∂X nemusí být topologická hranice, i když ji značíme stejně, např. $X=\mathbb{D}\cup\underbrace{\text{otevřený oblouk v } S^1}_{\partial X}$, kde $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$

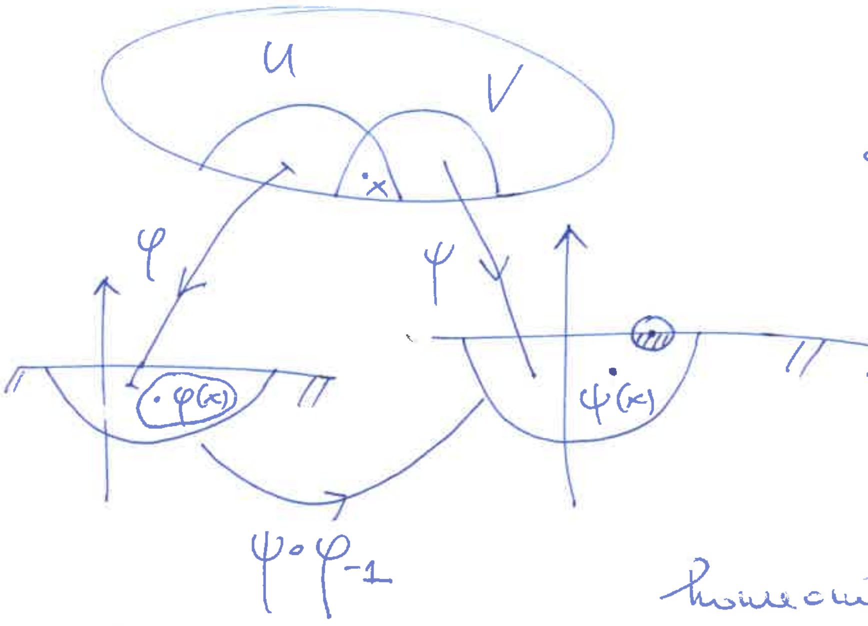


DEF. Nechť X je varieta s okrajem dimenze n. Řekneme, že $x \in X$ leží na okraji X, pokud ex. mapa (U,φ) na X tak, že $x \in U$ a $\varphi(x) \in \partial H^n$. Označme ∂X množinu všech $x \in X$, které leží na okraji X, a nazveme ji okrajem X.

⌈Viz. (Př.) u/str.!⌋

Pozn: (i) Platí, že $x \in \partial X$, právě když pro každou mapu (U,φ) na X takovou, že $x \in U$, je $\varphi(x) \in \partial H^n$.

⌈Nechť (U,φ), (V,ψ) jsou mapy na X. Nechť $x \in U \cap V$ a $\varphi(x) \notin \partial H^n$. Ukážeme, že $\psi(x) \notin \partial H^m$.



Ex. otevřená $W \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $\varphi(x) \in W \subset \varphi(U \cap V)$. Např. $W := \varphi(U \cap V) \setminus \partial H^n$. Potom máme

$$\psi(x) \in \underbrace{\psi \circ \varphi_{-1}(W)}_{\text{otevřená v } \mathbb{R}^n} \subset H^n.$$

homeomorf.

z věty o inverz. zobrazení (MA),

tudíž $\psi(x) \notin \partial H^n$. ▨

(ii) X je hladká varieta $\iff$ X je varieta s okrajem a $\partial X = \emptyset$.

[$\Leftarrow$: jasné, protože každá otevřená $U \subset H^n$, pro kterou je $U \cap \partial H^n = \emptyset$, je otevřená v $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$: Na X lze zadat atlas složený z map (U, φ) takových, že $\varphi(U) \subset H^n \setminus \partial H^n$.]

VĚTA: Nechť X je varieta s okrajem dimenze n. Potom na ∂X lze definovat kanonicky strukturu hladké variety dimenze $(n-1)$ (bez okraje, tzn. $\partial(\partial X) = \emptyset$). Přesněji:

(i) Nechť $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ je atlas definující diferenc. strukturu na X. Potom

$$\mathcal{A}|_{\partial X} := \{(U_\alpha \cap \partial X, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X})\}_{\alpha \in A}$$

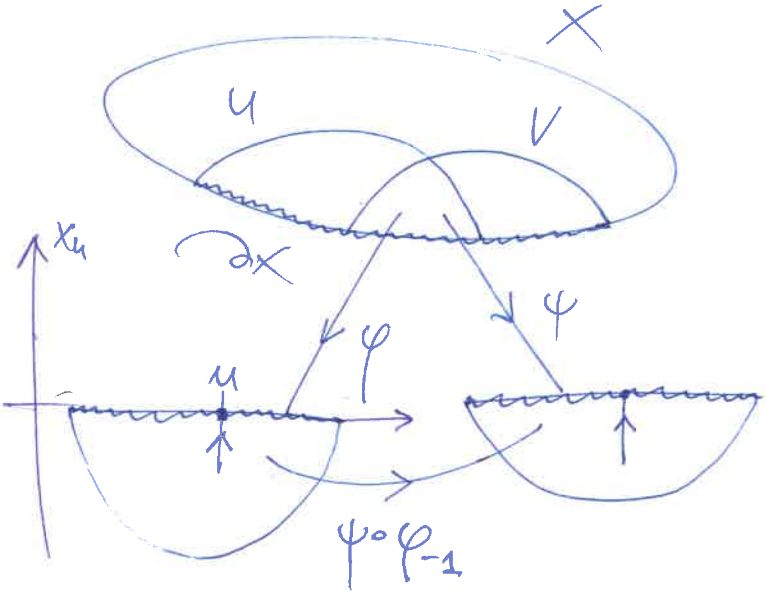
je atlas na ∂X definující difer. strukturu na ∂X.

(ii) Nechť X je navíc orientovaná varieta a $\mathcal{A}$ je orientovaný atlas na X, tzn.

přechodové funkce mezi libovolnými 2 mapami z $\mathcal{A}$ mají kladný jakobián na svých definičních oborech. Potom $\mathcal{A}|_{\partial X}$ je orientovaný atlas na ∂X a zadává na ∂X tzv. indukovanou orientaci.

DŮKAZ: (i) Zřejmě φ_α je homeomorfismus $(U_\alpha \cap \partial X)$ na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial X)$, což je otevřená množina v $\partial H^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$. Totiž $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial X) = \underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha)}_{\text{ot. v } H^n} \cap\, \partial H^n$

(ii) Nechť (U,φ), (V,ψ) jsou mapy na X a $U \cap V \cap \partial X \neq \emptyset$.



Potom $\psi \circ \varphi_{-1} =: \Phi$ je zobrazení z $\varphi(U \cap V \cap \partial X)$ na $\psi(U \cap V \cap \partial X)$, což jsou obě otevřené podmnožiny v $\partial H^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$. Dále $\tilde{\Phi} := \Phi|_{\varphi(U \cap V \cap \partial X)}$ je hladké. Podobně pro $\varphi \circ \psi_{-1}$.

Nechť $u \in \varphi(U \cap V \cap \partial X)$. Potom v u máme

LÉPE: $D\phi$:

$$\mathrm{Jac}\,\phi = \overset{D\tilde{\phi}}{\begin{pmatrix} \mathrm{Jac}\,\tilde{\phi} & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & \boxed{\partial_{x_n}\phi_n} \end{pmatrix}},$$

kde $\tilde{\phi}$ chápeme jako zobrazení z $\mathbb{R}^{n-1}$ do $\mathbb{R}^{n-1}$, zřejmě $\phi_n = 0$ na $\partial H_n \cap \varphi(U \cap V)$.

jakobián

Potom $\det(\mathrm{Jac}\,\phi) = \det(\mathrm{Jac}\,\tilde{\phi}) \cdot \partial_{x_n}\phi_n$.

Dále zřejmě $\partial_{x_n}\phi_n(u) \neq 0$ a $\partial_{x_n}\phi_n(u) > 0$, protože $\phi_n(u - t e_n) < 0$ pro malé $t > 0$.

Máme, že jakobiány ϕ a $\tilde{\phi}$ mají v u stejná znaménka. ▨

ÚMLUVA V dalším textu varietou myslíme varietu s okrajem, nebude-li řečeno něco jiného.

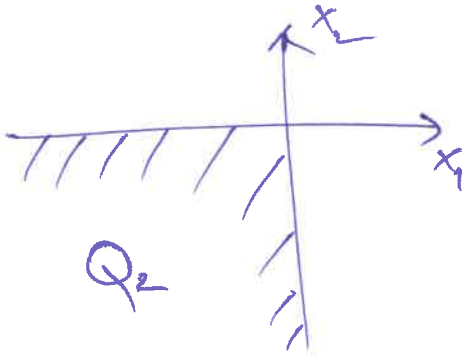
Pří Popište přirozenou strukturu variety s okrajem na $B_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$. Ukažte, že okraj ∂B_3 je S^2.

[Užijte nejprve sférické souřadnice.]

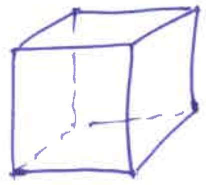
Pozn: (ii) Pokud jako "lokální model" místo poloprostorů H_n vezmeme kvadrant

$$Q_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0, \dots, x_n \le 0\},$$

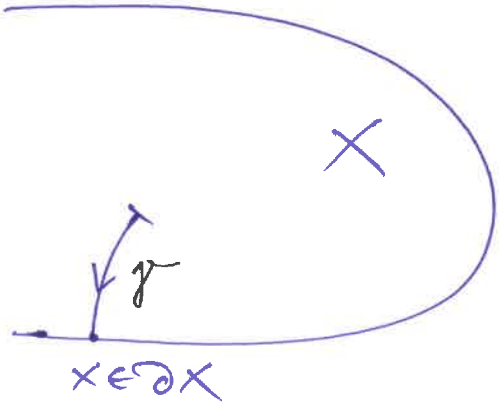
dostaneme tzv. variety s hranami.



Př: Uzavřená krychle $X := [0,1]^n$



(i) Pojmy a výsledky pro variety lze rovnou snadno zobecnit i pro variety s okrajem, např. T_xX, T^*_xX, $\mathcal{E}^*(X)$, rozklad jednotky a integrace diferenciálních forem na X.



Je-li $x \in \partial X$, potom $v \in T_xX$ je zobrazení $v: \mathcal{E}_X \to \mathbb{R}$ takové, že ex. křivka $\gamma: (-\varepsilon, 0] \to X$, pro kterou $\gamma(0) = x$ a $\forall f \in \mathcal{E}_X$:

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0-}$$

derivace zleva