

Informace o předmětu

NMMA301 Úvod do komplexní analýzy, ZS 2020/21

Roman Lávička

(verze ze dne 4. 1. 2020)

Výuka předmětu začne probíhat distanční formou pomocí platformy ZOOM. Pozvánky na ZOOM setkání dostanete emailem, který máte uveden v SISu. Přednáška se koná podle rozvrhu každé úterý od 10:40 buď ve formě online přenosu nebo vystavené video prezentace. Online cvičení společné pro všechny studenty bude probíhat každý čtvrtek od 17:20.

Zápočet student získá za vypracování domácích úloh.

Termíny zkoušek budou vypsány ve studijním informačním systému SIS. Pokud bude možné prezenční zkoušení, bude zkouška písemná. V opačném případě budete informováni, kdy a jak zkoušení proběhne.

Při prezenční zkoušce není dovoleno používat nic kromě psacích potřeb. Zkouška bude mít 2 části. Teoretická část bude trvat 60 minut a početní část 75 minut. Z každé části může student získat maximálně 30 bodů a musí mít aspoň 15 bodů, aby u zkoušky uspěl. Pokud student získá z každé části aspoň 15 bodů, pak bude hodnocen podle dosaženého bodového součtu z obou částí takto: výborně za 51 - 60 bodů, velmi dobře za 41 - 50 bodů a dobře za 30 - 40 bodů.

Požadavky z teoretické části:

1. Zavedení prostoru komplexních čísel $\mathbf{C}$, základní vlastnosti.
2. Derivace komplexní funkce komplexní proměnné, základní vlastnosti, Cauchy-Riemannova věta.
3. Zavedení elementárních funkcí v $\mathbf{C}$: exponenciály, hyperbolických, goniometrických funkcí, argumentu, logaritmu a obecné mocniny. Hlavní hodnota argumentu, logaritmu a mocniny. Základní vlastnosti.
4. Definice (regulární) křivky a křivkového integrálu, základní vlastnosti.
5. Tvrzení o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce.
6. Věta o existenci primitivní funkce na obecné a na hvězdovitě konvexní oblasti.
7. Goursatovo lemma aneb Cauchyho věta pro trojúhelník.
8. Cauchyho věta pro hvězdovitě konvexní oblasti.

9. Věta o derivování integrálu závislého na komplexním parametru.
10. Definice indexu bodu vzhledem ke křivce. Věta o základních vlastnostech indexu.
11. Cauchyho vzorec pro kruh. Cauchyho odhady.
12. Morerova věta.
13. Liouvilleova věta.
14. Základní věta algebry.
15. Weierstrassova věta. Konvergence a derivování mocninné řady.
16. Věta o rozvoji holomorfní funkce v mocninnou řadu na kruhu.
17. Věta o nulovém bodě holomorfní funkce.
18. Věta o jednoznačnosti pro holomorfní funkce.
19. Princip maxima modulu.
20. Riemannova sféra $\mathbf{S} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
21. Klasifikace izolovaných singularit: věta o odstranitelné singularitě, věta o pólu a Weierstrass-Casoratiho věta o podstatné singularitě. Picardova věta (bd).
22. Zavedení a konvergence Laurentových řad.
23. Cauchyho vzorec pro mezikruží.
24. Věta o rozvoji holomorfní funkce v Laurentovu řadu na mezikruží. Věta o Laurentově rozvoji kolem izolované singularity.
25. Rozklad funkce holomorfní s konečně mnoha izolovanými singularitami.
26. Reziduová věta na hvězdovitě konvexní oblasti. Pravidla pro výpočet reziduí.
27. Jednoznačné větve argumentu a logaritmu podél křivky. Význam a výpočet indexu bodu ke křivce.
28. Aplikace reziduové věty: Věty o výpočtu integrálů typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx.$$

29. Obecná Cauchyho a reziduová věta pro cykly a jednoduše souvislé oblasti.
30. Jordanova křivka a Jordanova věta (bd).
31. Funkce Γ , Riemannova zeta funkce a Riemannova hypotéza (bd).

(bd) = nebude zkoušen důkaz, jen znění příslušné věty

Požadavky z početní části: Příklady na Laurentovy řady, izolované singularity, rezidua a pomocí reziduové věty výpočet integrálů typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x dx,$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \int_0^{+\infty} R(x) x^{p-1} dx \text{ a } \int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x) e^{px} dx,$$

kde R je racionální funkce a p necelé číslo (viz. kapitola 2 v [K]).

Literatura:

[K] J. Kopáček a kol., Příklady z matematiky pro fyziky IV, Matfyzpress, MFF UK Praha, 1996.

[N] B. Novák, Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK, skripta, 1973

[R] W. Rudin, Reálná a komplexní analýza, Academia Praha, 1977

[V] J. Veselý, Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, UK Praha, 2000.

Ve skriptech [N] a [V] jsou rovněž vyřešené základní typy příkladů. Upozorňuji, že v [K] a v [N] se používá odlišné značení pro argument, logaritmus a obecnou mocninu, než jsme zavedli na přednášce (např. pro hlavní hodnotu se užívá značení Log , Ln a Arg).