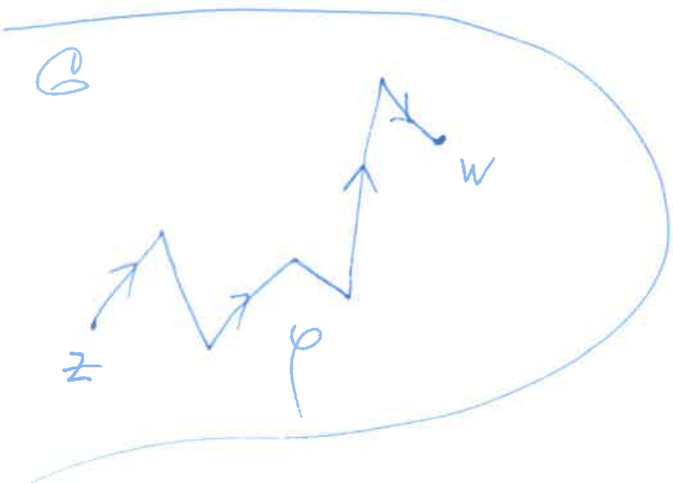
$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G.

Důkaz: $\boxed{\Rightarrow}$ jasné;

$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w. Potom



$$f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0,$$ protože

f je PF k f' na G. ▨

Důsledek: Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom ex. $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.

$$\ulcorner (F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0. \lrcorner$$

$\boxed{\text{VĚTA}}$ (o existenci PF)

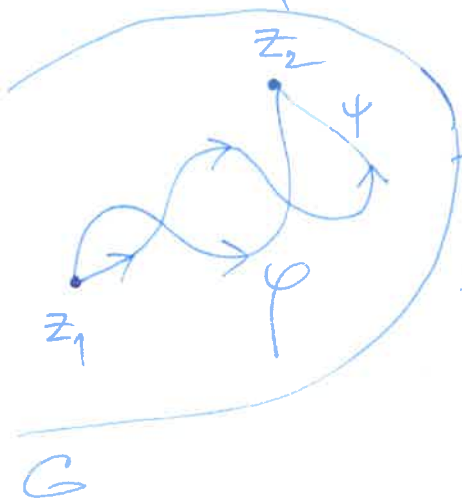
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G. NTJE:

1. f má na G primitivní funkci;

2. $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G (tzn. $\langle\varphi\rangle \subset G$)

3. $\int_\varphi f$ nezávisí v G na křivce φ, tzn. pro každé křivky $\varphi: [\alpha, \beta] \to G$, $\psi: [\gamma, \delta] \to G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí

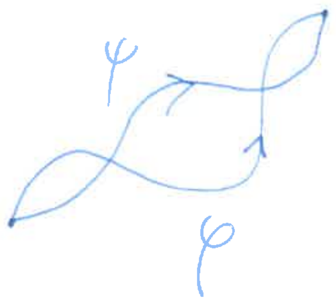
$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$



X Pozn: Připomeňme větu o potenciálu z MA ② Geometrie

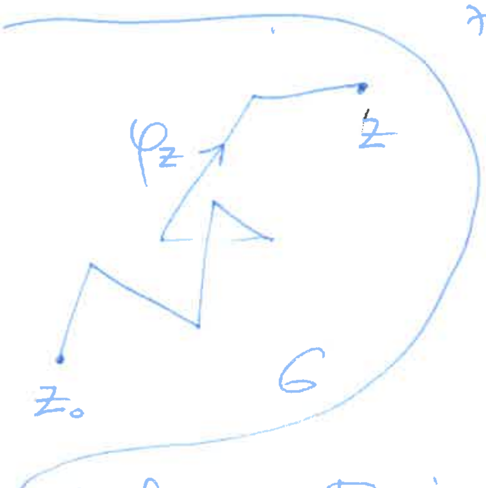
Důkaz: (1.) $\Rightarrow$ (2.): plyne z Věty o výpočtu integrálu pomocí PF;

(2.) $\Rightarrow$ (3.): Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je τ uzavřená a z (2.) dostaneme



$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

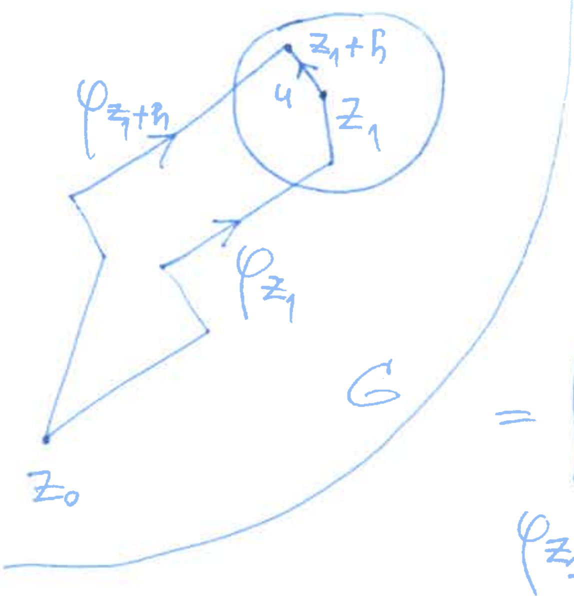
(3.) $\Rightarrow$ (1.): Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z. Definujme



$$F(z) := \int_{\varphi_z} f, \quad z \in G.$$

Funkce F je korektní, nezávislé na volbě φ_z, protože předpokládáme (3.). Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G.

Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$.



Volme $r>0$, aby $U(z_1,r)\subset G$. Je-li $|h|<r$, potom

$$F(z_1+h)-F(z_1) \overset{3.}{=}$$

$$=\int_{\varphi_{z_1}\dot{+}u} f-\int_{\varphi_{z_1}} f=\int_u f,\ \text{kde}$$

$u=[z_1;z_1+h]$, tj. $u(t)=z_1+t\cdot h$, $t\in[0,1]$.
úsečka

Tedy $F(z_1+h)-F(z_1)=\int_u f=\int_0^1 f(z_1+th)\,h\,dt$,
tudíž

$$\frac{F(z_1+h)-F(z_1)}{h}-f(z_1)=\int_0^1\big(f(z_1+th)-f(z_1)\big)\,dt$$

$\downarrow$ pro $h\to 0$

0,

protože $\left|\int_0^1\big(f(z_1+th)-f(z_1)\big)\,dt\right|\le \max\limits_{z\in[z_1;z_1+h]}|f(z)-f(z_1)|$

$\downarrow$ pro $h\to 0$

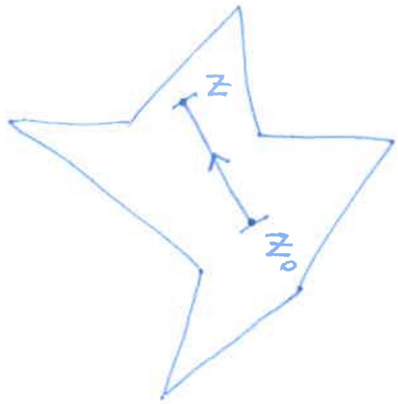
0

ze spojitosti f v z_1.

Máme, že $F'(z_1)=f(z_1)$. ∎

Označení: ① Řekneme, že $M \subset \mathbb{C}$ je **hvězdovitá**, pokud ex. $z_0 \in M$ (tzv. **střed hvězdovitosti**), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každý $z \in M$.

Pozn: konvexní $\subsetneq$ hvězdovité

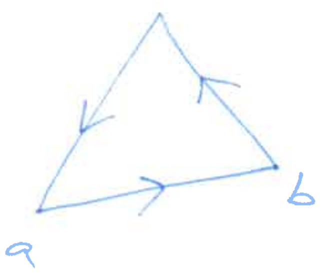


② Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je **trojúhelník** s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

↖ konvexní obal a, b, c

a značíme $\partial\Delta := [a; b] \dotplus [b; c] \dotplus [c; a]$.



Připouštíme i degenerovaný Δ, tzn. a, b, c mohou ležet i na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

$\boxed{\text{DODATEK}}$ Nechť f je spojitá funkce na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$(*) \qquad \int_{\partial\Delta} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

DŮKAZ: Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G. Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a

$$F(z) := \int_{\varphi_z} f.$$

Rozmyslete, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický ③ ⟹ ① předchozí VĚTY, když místo ③ užijeme $(*)$. ▨