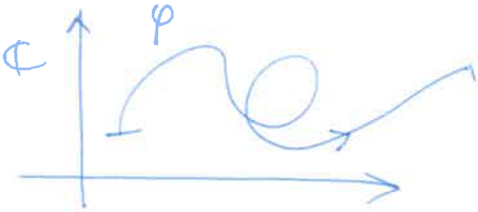
Křivkový integrál

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$



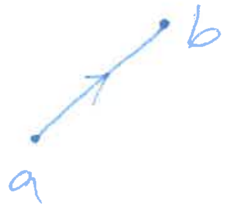
$$\int_\varphi f$$

DEF. Nechť (par.) $\varphi: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$. Potom

(i) φ je křivka (cesta), pokud je φ spojitá;

(ii) φ je regulární křivka, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a ex. dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ taková, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferenc. pro kaž. $i = 0, \dots, n-1$.

Př. 1) úsečka: Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Potom



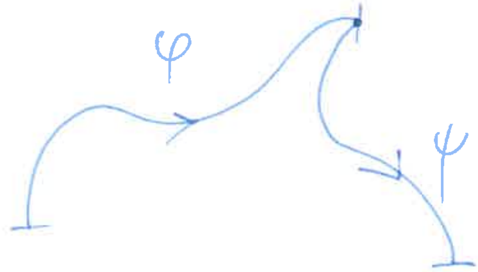
$$\varphi(t) := a + t \cdot (b-a), \quad t \in [0,1]$$

je úsečka z a do b. Značíme $[a;b]$.

Značení: Nechť $\varphi: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ a $\psi: [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich součet je (regulární) křivka

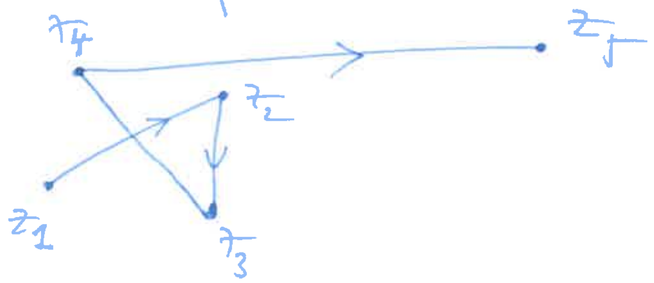
$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \varphi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$
$$:= \psi(t - \beta + \gamma), \quad t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma],$$

pokud $\varphi(\beta) = \psi(\alpha)$.



2) Řekneme, že φ je lomená čára v $\mathbb{C}$, ex.-li $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ takové, že

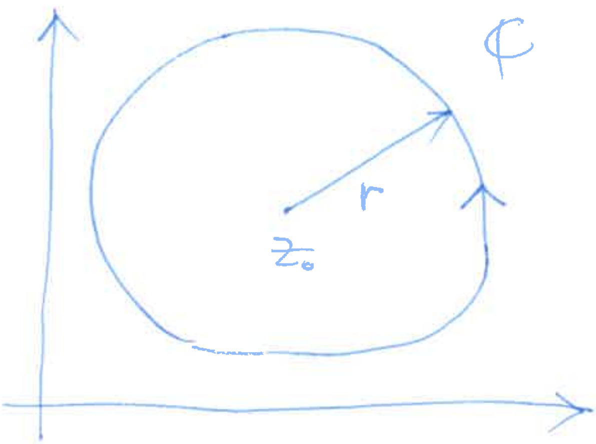
$$\varphi = [z_1; z_2] \dot{+} [z_2; z_3] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{k-1}, z_k]$$



3) Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom

$$\varphi(t) := z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

je kružnice probíhaná v kladném smyslu.



POZOR

Pozn.: Pro křivku φ její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ může být např. čtverec (PEANOVA KŘIVKA)

Úmluva: Pokud neřekneme něco jiného, křivkou budeme rozumět regulární křivku v $\mathbb{C}$.

Připomenutí: jako v MA definujeme pro φ

× (i) vše po složkách, např.

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t) \quad \text{a}$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,dt,$$

mají-li pravé strany smysl.

Zde $\varphi(t) = \underbrace{(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}_{\text{reálné složky}} = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$.

→ (ii) **Délka křivky:** $V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$, je-li φ regulární

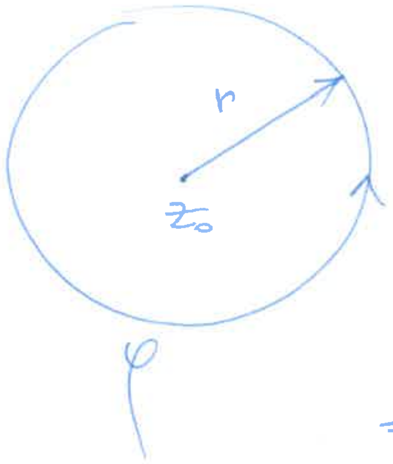
DEF. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))}_{\text{spoj.}}\, \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{po částech spoj.}}\,dt \qquad (*)$$

Pozn.: (i) Křivkový integrál $(*)$ ex. vždy jako Riemannův.

(ii) Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,dz$

Př. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.



Potom $\int_\varphi (z - z_0)^n \, dz =$

$$z = \varphi(t)$$
$$dz = \varphi'(t)\,dt$$
$$dz = ire^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot i r e^{it} \, dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt$$

$$\begin{cases} = i r^{n+1} \left[\dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0, & \text{je-li } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1; \\ = 2\pi i, & \text{je-li } n = -1. \end{cases}$$

[na cvičení]

$\boxed{\text{OTÁZKA}}$ Jaký je vztah $\int_\varphi f$ k reálným křivkovým integrálům, které znáte z ~~MA~~ 2?
2. druhu Geom. 1

Základní vlastnosti

(1.) Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g .$$

(2.) Je-li φ křivka a f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$, potom

$$\left|\int_\varphi f\right| \le \underbrace{\max_{\langle\varphi\rangle}|f|^{*)}}_{\overset{..}{\underset{}{M}}} \cdot V(\varphi)$$

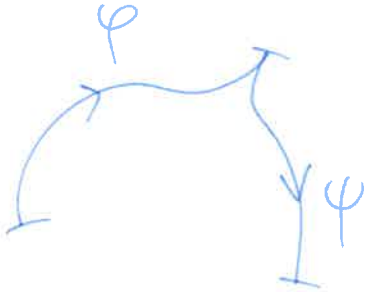
⌈ Skutečně, máme

$$\left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\le M}\,|\varphi'(t)|\,dt$$

$$\le M \cdot V(\varphi). \rfloor$$

*) $\max_{\langle\varphi\rangle}|f| = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\text{spoj}} \in [0,+\infty)$

3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom



$$\int_{\varphi \dotplus \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \quad \text{a}$$

$$\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f,$$

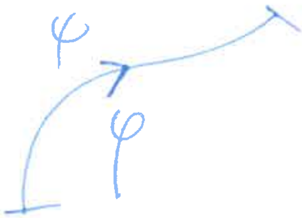
kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je opačná křivka k φ.

zachovávající orientaci

4. Křivk. integrál nezávisí na parametrizaci křivky:

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferenc. s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$.

Potom
$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$



Důkaz:
$$\int_{\psi} f = \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \underbrace{\varphi'(\omega(t))\, \omega'(t)}_{\psi'(t)}\, dt \underset{\substack{\tau = \omega(t) \\ \text{subst.}}}{=}$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, d\tau = \int_{\varphi} f. \;\blacksquare$$

DEF. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F, pokud $F' = f$ na G.

Př. (i) $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ je PF k z^n na $\mathbb{C}$ pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

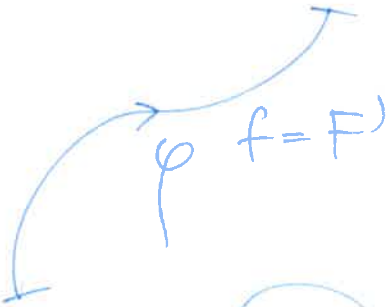
na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pro $n = -2, -3, \dots$

$\boxed{\text{(ii) Jakou PF má } 1/z\,?}$

Věta (o výpočtu křivk. integrálu pomocí PF)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ je křivka (reg.) a f je spojitá*) na $\langle \varphi \rangle$. Potom

(i) $\displaystyle\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ a



(ii) $\displaystyle\int_\varphi f = 0$, je-li φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Pozn: *) Ukážeme si, že funkce f mající na G primit. fci je tam holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz: Máme

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))\,\varphi'(t)}_{\overset{?}{=}\ \frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t))\right)}\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$\frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t))\right)$ až na konečně mnoho $t \in [\alpha,\beta]$

neboli $F \circ \varphi$ je zobecněná PF k integrandu.

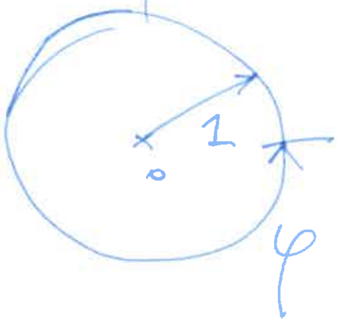
(?) plyne z CR rovnic, protože

$$\frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t))\right) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{F'} \varphi_1' + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{iF'} \varphi_2' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

$\blacksquare$

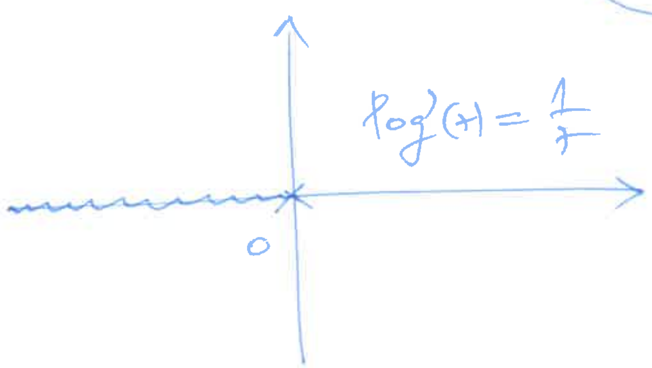
Pr. 1) $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nemá PF, protože víme

$$\int_\varphi \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad \text{pro} \quad \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$



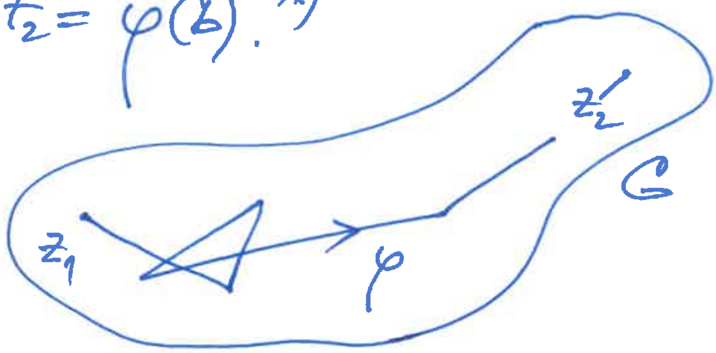
2) $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

PF $\log(z)$

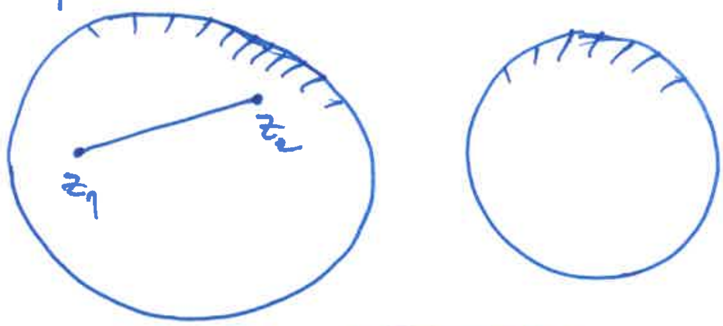


VSUVKA oblasti v $\mathbb{C}$

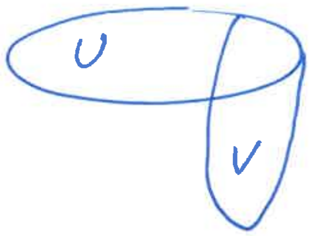
DEF. Řekneme, že otevřená $G \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^n$) je <u>oblast</u>, pokud pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje lomená čára $\varphi : [a,b] \to G$ taková, že $z_1 = \varphi(a)$ a $z_2 = \varphi(b)$. *)



Při (i) Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a <u>konvexní</u>, potom je G oblast.



(ii) Jsou-li $U, V \subset \mathbb{C}$ oblasti, $U \cap V \neq \emptyset$, potom $U \cup V$ je oblast



<u>Pozn:</u> $I \subset \mathbb{R}$ je oblast, právě když je I otevřený interval

---

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pro $z_1, z_2 \in G$ píšeme $z_1 \sim z_2$, pokud ex. lomená čára φ v G spojující z_1 a z_2, viz *).

Relace $\sim$ je ekvivalence, tzn. $z \sim z$;

$z_1 \sim z_2 \Rightarrow z_2 \sim z_1$;

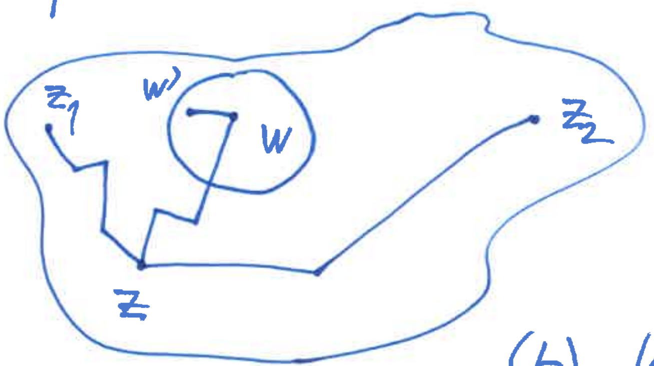
$z_1 \sim z_2,\ z_2 \sim z_3 \Rightarrow z_1 \sim z_3$.

Pro $z \in G$ je $[z] := \{ w \in G \mid z \sim w \}$ je třída ekvivalence generovaná z.

Zřejmě pro $z, w \in G$ je buď $[z] \cap [w] = \emptyset$, anebo $[z] = [w]$. Označme $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ všechny třídy ekvivalence pro $\sim$. | dod ^{*2}

$\boxed{\text{Fakt}}$ Potom $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, I je nejvýše spočetná a $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$, je-li $\alpha \neq \beta$. Každá G_α je <u>oblast</u> a nazývá se <u>komponenta</u> G.

<u>DŮKAZ</u>: (i) G_α je oblast: Nechť $G_\alpha = [z]$ pro nějaké $z \in G$. (a) G_α je otevřená: Nechť $w \in G_\alpha$ a okolí $U(w) \subset G$.



Potom každý $w' \in U(w)$ lze spojit v G lomenou čarou se z. Tudíž $U(w) \subset G_\alpha$.

(b) Každé $z_1, z_2 \in G_\alpha$ lze spojit lomenou čarou v G a dokonce v G_α, viz OBR.

(ii) Pro každé $\alpha \in I$ volme $z_\alpha \in \underset{\text{ot.}}{G_\alpha} \cap \underset{\text{spočetná}}{(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})}$

zřejmě $z_\alpha \neq z_\beta$, je-li $\alpha \neq \beta$.

Tedy I je nejvýše spočetná. ∎

<u>Pozn</u>: <u>Komponenty</u> otevřené $G \subset \mathbb{C}$ jsou <u>maximální oblasti</u> v G.