# Spinorové prostory

## 1. Ireducibilní reprezentace $\mathbb{C}_n$

Úmluva: Všechny prostory jsou konečně dimenzionální, nevyslovíme-li jinak.

Nechť $A$ je asociativní algebra nad tělesem $\mathbb{K}$ s jednotkou.

Př.
- $\mathbb{R}_{p,q}$, $\mathbb{C}_n$
- $Mat(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n\times n}$ s maticovým násob.
  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- $End(V) := \{L : V \to V \text{ lineární}\} \simeq Mat(n, \mathbb{K})$, s operací skládání

  kde $V$ je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ a $\dim V = n$.

Př. Nechť $A$ je reálná algebra (tzn. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Potom na její komplexifikaci $A_{\mathbb{C}} := A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ~~existuje~~ máme přirozenou strukturu komplexní algebry.

[Skutečně, obecný prvek z $A_{\mathbb{C}}$ má tvar

$$a\otimes 1 + b \otimes i =: a + bi \quad \text{pro } a, b \in A.$$

Neboli $A_{\mathbb{C}} = A \oplus iA$.

$A_{\mathbb{C}}$ je komplex. vekt. prostor, když definujeme

$$i(a+bi) := -b + ia$$

Násobení na $A_{\mathbb{C}}$ je definováno 'po složkách', tzn.

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$
]

Např. $\mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}_{p+q}$ §2

A-modul

**DEF.** <u>Reprezentace</u> algebry $A$ je vektorový prostor $V$ nad tělesem $\mathbb{K}$, na kterém je zadána akce $A$, tzn. ($\mathbb{K}$-lineární) homomorfismus algeber

$$\phi : A \longmapsto \mathrm{End}(V)$$

<u>Pozn:</u> (i) Budou nás zajímat hlavně <u>komplexní</u> reprezentace <u>reálných</u> nebo <u>komplex.</u> algeber (tzn. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

(ii) Nechť $V$ je <u>komplexní</u> reprezentace <u>reálné</u> algebry $A$ s akcí $\Phi : A \longmapsto \mathrm{End}\, V$. Potom lze tato reprez. jednoznačně rozšířit na reprezentaci $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ s akcí

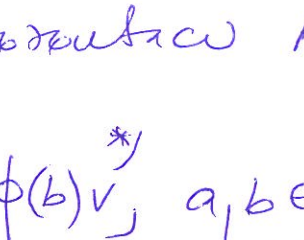
$$\Phi_{\mathbb{C}}(a+bi)v := \phi(a)v + i\,\phi(b)v^{*)}, \quad a,b \in A;\ v \in V$$

Neboli <u>komplex.</u> reprezentace $A$ a $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = A_{\mathbb{C}}$ jsou stejné. [ *) $\phi(b)$ is $\mathbb{C}$-linear $\Rightarrow$ $\phi(b)(iv) = i\,\phi(b)v$ ]

**Př.** Nechť $A = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. Potom <u>definující</u> <u>reprezentace</u> $A$ je $\mathbb{C}^n$ s akcí

(1) $\phi(a)v := av$, $a \in A$, $v \in \mathbb{C}^n$

matice krát sloupc. vektor

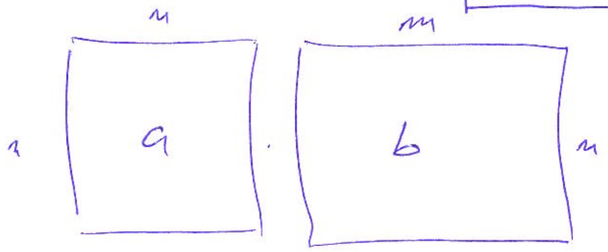



<u>Pozn:</u> Často se píše místo $\phi(a)v$ např. $a \cdot v$, $av$

Obecněji $\mathbb{C}^{n\times m}$ je reprez. $A$ s akcí

(2) $\phi(a)b = ab$, $a \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^{n\times m}$

matic. násobení



Podobně i pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{H}$.

x

**DEF.** Nechť $V$ je reprezentace $A$ s akcí $\phi : A \to \operatorname{End} V$.

(i) Řekneme, že podprostor $W \subset V$ je <u>podreprezentace</u> $V$, pokud je $W$ <u>invariantní</u> vůči akci $\phi$, tzn. $\forall a \in A : \phi(a) W \subset W$.

**Pozn:** Zřejmě $W$ je reprezentace $A$ s akcí

$$\phi|_W(a) := \phi(a)|_W \in \operatorname{End} W, \quad a \in A.$$

(ii) Řekneme, že reprezentace $V$ je <u>ireducibilní</u> (<u>jednoduchá</u>), pokud $V$ neobsahuje podreprezent. $0 \neq W \subsetneq V$.

**Cv.** (i) Dokažte, že definující repr. (1) je ireducibilní.

(ii) Pro reprezentaci (2) platí

$$\mathbb{C}^{n\times m} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m, \text{ kde}$$

$$V_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \end{pmatrix} \right\} \simeq (1)$$

$i$

nenulový jen $i$-tý sloupec

<u>podreprezentace</u>

Pozn: Nechť $V, W$ jsou reprezentace $A$. Potom $V \oplus W$ je reprezentace $A$ s akcí

$$a \cdot (v+w) := (a \cdot v) + (a \cdot w), \quad \begin{array}{l} a \in A \\ v \in V \\ w \in W \end{array}$$

---

DEF. Nechť $V, W$ jsou reprezentace $A$.

(i) Řekneme, že lineární zobrazení $L : V \to W$ je je[ho] homomorfismus (invariantní nebo splétající zobrazení), pokud $L$ komutuje s akcí $A$ na $V$ a $W$, tzn.

$$L(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{akce na } V}}{a \cdot v}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{akce na } W}}{a \cdot L(v)}, \quad a \in A, v \in V.$$

(ii) Je-li navíc $L$ bijekce, potom je $L$ izomorfismus $V$ na $W$ a reprezentace $V$ a $W$ nazýváme izomorfní (ekvivalentní). Píšeme $V \simeq W$.

$\boxed{\text{TVRZENÍ}}$ Nechť $A = Mat(n, \mathbb{C})$.

(i) Potom definující reprezentace (1) je jediná ireducib. repres. $A$ (až na izomorfismus).

(ii) každá konečně dimenz. reprezentace $V$ je izomorfní s $\mathbb{C}^{n \times m}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ (viz (21)), tzn. s direktním součtem několika kopií definující reprezentace.

Důkaz: Etingof: Intro to Representation Theory, 2011. $\boxtimes$

**DŮSLEDEK:**

1. $\mathbb{C}_{2m}$ má jedinou ireducibilní reprezentaci $\$_{2m}$.
   (až na izomorf.)

⌈ Protože $\mathbb{C}_{2m} \simeq Mat(2^m, \mathbb{C})$, $\$_{2m} \simeq \mathbb{C}^{2^m}$. ⌋

Říkáme, že $\$_{2m}$ je prostor Diracových spinorů.

2. $\mathbb{C}_{2m-1}$ má právě dvě různé ireducibilní reprezentace $\$^{\pm}_{2m}$, tzn. $\$^{+}_{2m} \not\simeq \$^{-}_{2m}$ a pro každou ireducibilní repr. $S$ platí, že $S \simeq \$^{+}_{2m}$ nebo $S \simeq \$^{-}_{2m}$.
   Říkáme, že $\$^{\pm}_{2m}$ jsou prostory Weylových spinorů.

⌈ Protože $\mathbb{C}_{2m-1} \simeq Mat(2^{m-1}, \mathbb{C}) \oplus Mat(2^{m-1}, \mathbb{C})$,
$\$^{\pm}_{2m} \simeq \mathbb{C}^{2^{m-1}}$ s akcí $\phi^{\pm}(a^+, a^-)v := a^{\pm}v$, $a^{\pm} \in Mat(\dots$, $v \in \mathbb{C}^{2^{m-1}}$.
Neboli $\$^{\pm}_{2m}$ jsou následující reprezentace pro první/druhou kopii $Mat(2^{m-1}, \mathbb{C})$. ⌋

## Vztah mezi Diracovými a Weylovými spinory

Zřejmě následující algebry jsou izomorfní

$$\mathbb{C}^{+}_{2m} \simeq \mathbb{C}_{2m-1} \simeq Mat(2^{m-1}, \mathbb{C}) \oplus Mat(2^{m-1}, \mathbb{C}) \simeq$$

$$Mat^{+}(2^m, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline a^+ & 0 \\ \hline 0 & a^- \\ \hline \end{array} \;\middle|\; a^{\pm} \in Mat(2^{m-1}, \mathbb{C}) \right\},$$ kde

$Mat^{+}(2^m, \mathbb{C})$ chápeme jako podalgebru $Mat(2^m, \mathbb{C})$.

Chápeme-li $\$_{2m}$ jako reprezentaci podalgebry $\mathbb{C}^+_{2m} \simeq \mathrm{Mat}^+(2^m, \mathbb{C})$, potom

$$\$_{2m} \simeq \$^+_{2m} \oplus \$^-_{2m}.$$

Skutečně, máme

$$\begin{pmatrix} a^+ & 0 \\ 0 & a^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^+ \\ v^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^+ v^+ \\ a^- v^- \end{pmatrix}, \quad a^\pm \in \mathrm{Mat}(2^{m-1}, \mathbb{C}), \quad v^\pm \in \$^\pm_{2m}.$$

Proto se $\$^\pm_{2m}$ nazývají také <u>polospinory</u>.

?) <u>Pozn.:</u> Pro $\mathbb{R}_{p,q}$ jsou <u>"rozumné spinorové prostory"</u> definující reprezentace $\mathbb{k}^m$ pro <u>prosté</u> $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{k})$, kde $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{H}$. Skutečně,

$$\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathrm{Mat}(m, \mathbb{k})$$
$$\simeq \mathrm{Mat}(m, \mathbb{k}) \oplus \mathrm{Mat}(m, \mathbb{k}).$$

## 2. Minimální levý ideál v $\mathbb{C}_{2m}$

Řekneme, že $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}_{2m}$ je levý ideál, pokud $\mathcal{J}$ je podprostor a $\forall a \in \mathbb{C}_{2m}\ \forall v \in \mathcal{J}: av \in \mathcal{J}$.

Levý ideál $\mathcal{J}$ v $\mathbb{C}_{2m}$ je minimální, pokud neexistuje $\underbrace{0 \neq \tilde{\mathcal{J}} \subsetneq \mathcal{J}}_{\text{levý ideál}}$.

Konjugace na $\mathbb{C}_n$: Involuce $\hat{\ }$, $*$ definujeme stejně jako v $\mathbb{R}_n$. Je-li $a = \sum_I a_I e_I \in \mathbb{C}_n$, položme

$$\bar{a} := \sum_I \bar{a}_I \bar{e}_I,$$ kde $\bar{a}_I$ je komplex. sdružené č. k $a_I$ a $\bar{e}_I := (\hat{e}_I)^* = (e_I^*)^\wedge$.

---

Nechť $e_1, \dots, e_{2m}$ jsou generátory $\mathbb{C}_{2m}$, tzn. tvoří ON-bázi v $\mathbb{C}^{2m}$, neboli

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}.$$

Jako v $\mathbb{R}_n$ se ukáže, že

$$(x, y) = -\frac{1}{2}(xy + yx), \quad x, y \in \mathbb{C},$$

kde $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_{2m} y_{2m}$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_{2m} e_{2m}$, $y = y_1 e_1 + \dots$

je $\overset{\text{bilineární}}{\text{skalární součin}}$ na $\mathbb{C}^{2m}$.

# Wittova báze $\mathbb{C}^{2m}$

Pro $j=1,\dots,m$ položme $f_j := \frac{1}{2}(e_{2j-1} + i e_{2j})$

$$\bar{f}_j := -\frac{1}{2}(e_{2j-1} - i e_{2j})$$

Potom $f_1,\dots,f_m, \bar{f}_1,\dots,\bar{f}_m$ tvoří bázi $\mathbb{C}^{2m}$

[protože $f_j - \bar{f}_j = e_{2j-1}$, $f_j + \bar{f}_j = i e_{2j}$.]

Navíc platí $C_n$

(1) $f_j f_k + f_k f_j = 0$, spec. $\underset{(f_j, f_j)}{f_j^2} = 0$ (tzn. $f_j$ je <u>izotropní</u>)

(2) $\bar{f}_j \bar{f}_k + \bar{f}_k \bar{f}_j = 0$

(3) $\bar{f}_j f_k + f_k \bar{f}_j = \delta_{kj}$, spec. $\bar{f}_j f_j + f_j \bar{f}_j = 1$

spec. $\bar{f}_j f_j = \frac{1}{2}(1 - i e_{2j-1} e_{2j})$.

<u>Pozn:</u> (1) znamená, že $(f_j, f_k) = 0$

Tudíž $W := LO\{f_1,\dots,f_m\}$ je <u>izotropní</u> podprostor $\mathbb{C}^{2m}$, tzn. $\forall w_1, w_2 \in W: (w_1, w_2) = 0$. Z (1), (2), (3) pak plyne, že $\mathbb{C}^{2m} = W \oplus \bar{W}$, kde $W$ a

$$\bar{W} := LO\{\bar{f}_1,\dots,\bar{f}_m\}$$

jsou <u>maximální izotropní</u> podprostory $\mathbb{C}^{2m}$.

Položme pro $j=1,\dots,m$ $\quad I_j := \bar{f}_j f_j$

Potom $I_1,\dots,I_m$ jsou vzájemně komutující **idempotenty** v $\mathbb{C}_{2m}$, tzn. $I_k I_j = I_j I_k$ a $I_k^2 = I_k$

$$\ulcorner\ \bar{f}_k f_k \bar{f}_k f_k = \underbrace{(\bar{f}_k f_k + f_k \bar{f}_k)}_{1} \bar{f}_k f_k = \bar{f}_k f_k \ \lrcorner \qquad \bar{f}_k^2 = 0$$

Položme $I := I_1 \cdots I_m$. Potom $0 \neq I$ je **idempotent** v $\mathbb{C}_{2m}$. Cv. (?) $\mathbb{C}_{2m} = \mathbb{C}_{2m} I_j \oplus \mathbb{C}_{2m}(1-I_j)$

Cv. $I \neq 0$

$$I = \frac{1}{2^m}(1 - i e_1 e_2) \cdots (1 - i e_{2m-1} e_{2m}) =$$

$$= \frac{1}{2^m}\Big(1 + \cdots + \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le m} (-i)^k e_{2j_1-1} e_{2j_1} \cdots e_{2j_k-1} e_{2j_k} + \cdots\Big) \neq 0$$

netriviální lin. kombinace bázových prvků v $\mathbb{C}_{2m}$

Položme $\mathcal{S}_{2m} := \mathbb{C}_{2m} I$.

**VĚTA:** $\mathcal{S}_{2m}$ je minimální levý ideál v $\mathbb{C}_{2m}$

**DŮKAZ:** snadno ✓ $\mathcal{S}_{2m}$ je levý ideál v $\mathbb{C}_{2m}$.

Zřejmě $f_j I = 0$ [*] $\forall j=1,\dots,m$. $\ulcorner$ Skutečně, $f_j I_j = 0$. $\lrcorner$

Položme $f_J := f_{j_1} \cdots f_{j_k}$, je-li $J := \{j_1,\dots,j_k\}$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le m$.

---

[*] a $I f_j = 0$

Potom $f_J I$, $J \subset \{1,\dots,m\}$, je báze $\$_{2m}$. $\quad \$1.$

(a) Platí $\bar f_j f_J I = 0$, $j \notin J$;

$$= (-1)^{t-1} f_{J\setminus\{j_t\}} I, \quad j = j_t \in J.$$

$$\Big[\ \underbrace{\bar f_{j_t} f_{j_1}}_{(-1)} \cdots f_{j_t} \cdots f_{j_k} I = (-1)^{t-1} f_{j_1} \cdots f_{j_{t-1}} \underbrace{\big(\bar f_{j_t} f_{j_t} + f_{j_t} \underbrace{\bar f_{j_t}) \ldots}_{=0}}_{=1\ (3)}\ \Big]$$

(b) $I \bar f_K f_J I = \delta_{KL} I$ [snadno z (a)]

(c) Jako algebra je $\mathbb{C}_{2m}$ generována $\bar f_1, \dots, \bar f_m$, $f_1, \dots, f_m$. Podle (a) je pro každé $a \in \mathbb{C}_{2m}$ možno psát

$$aI = \sum_J \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{a_J}} f_J I.$$

(d) Nechť $\sum_J \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{a_J}} f_J I = 0$. Potom po vynásobení $I \bar f_K$ zleva dostaneme z (b), že

$$a_K I = 0, \text{ tedy } a_K = 0\ \forall K.$$

---

$\$_{2m}$ (můžeme chápat jako) je reprezentace $\mathbb{C}_{2m}$ *) dimenze $2^m$, je to tedy jediná (až na izomorf.) ireduc. reprez. $\mathbb{C}_{2m}$ a jako levý ideál je tedy $\$_{2m}$ minimální. ▨

*) s akcí danou Clifford. násobením

'komutovský'

**Pozn:** (i) Na $\mathbb{S}_{2m}$ definujeme skalární součin

$$\langle a,b\rangle := \sum_J \overline{a_J}\, b_J, \quad \text{kde } a = \sum a_J f_J I \in \mathbb{S}_{2m}$$
$$b = \sum b_J \cdots$$

Potom z (b) máme

- $\langle a,b\rangle = [\bar a b]_0 \cdot 2^m$, kde $[\cdot]_0 : \mathbb{C}_{2m} \to \mathbb{C}$ je projekce na skalární část, a

  [ $\bar a b = \langle a,b\rangle I$ & $\bar I = I$, $[I]_0 = 1/2^m$ ]

- $\langle a,a\rangle = |a|^2 \cdot 2^m$, kde $|a| := \sqrt{[\bar a a]_0}$ je Cliffordova norma v $\mathbb{C}_{2m}$

(ii) $\mathbb{S}_{2m}$ je konkrétní realizace prostoru Diracových spinorů v $\mathbb{C}_{2m}$. Dále platí, že

$$(*) \qquad \mathbb{S}_{2m} = \Lambda(W)\, I, \qquad [\text{viz } (1);\ f_i f_j = f_i \wedge f_j]$$

kde $\Lambda(W)$ je vnější algebra maximál. izotropního podprostoru $\mathbb{C}^{2m}$ generovaného $f_1, \dots, f_m$.
Ve fyzice se realizace (*) nazývá **Fockův prostor**. Rozložme

$$\Lambda(W) = \underset{\text{sudá část}}{\Lambda^+(W)} \oplus \underset{\text{lichá část}}{\Lambda^-(W)},$$

kde $\Lambda^{+/-}(W)$ je podprostor $\Lambda(W)$ generovaný $f_J$, kde $J$ má sudý/lichý počet indexů.

Potom $\mathbb{S}^{\pm}_{2m} := \Lambda^{\pm}(W)\, I$ jsou reprezentace $\mathbb{C}^{+}_{2m}$. [Zřejmě $\underset{\bar f_j}{f_j} v \in \mathbb{S}^{\mp}_{2m}$ $\forall v \in \mathbb{S}^{\pm}_{2m}$, $\underset{\mathbb{C}^{2m}}{w} v \in \mathbb{S}^{\mp}_{2m}$ ]

Protože jako reprezentace $\mathbb{C}^+_{2m} \simeq \mathbb{C}_{2m-1}$ je

$$\mathbb{S}_{2m} = \mathbb{S}^+_{2m} \oplus \mathbb{S}^-_{2m},$$

jsou $\mathbb{S}^\pm_{2m}$ konkrétní realizace dvou různých prostorů Weylových spinorů.

(iii) $\mathbb{C}_{2m}$ je reprezentace $\mathbb{C}_{2m}$ s akcí $\phi(a)b := ab$, $a,b \in \mathbb{C}_{2m}$. [daná Clifford. násobením]

Protože $\mathbb{C}_{2m} \simeq Mat(2^m, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}_{2m}$ se jako $\mathbb{C}_{2m}$-reprez. rozkládá na $2^m$ kopií $\mathbb{S}_{2m} \simeq \mathbb{C}^{2^m}$. Cv.

[Jiné kopie $\mathbb{S}_{2m}$ dostaneme jako $\mathbb{C}_{2m} I_J$, kde $J \subset \{1, \dots, m\}$, $J = \{j_1 \le j_2 \le \dots \le j_k\}$ a

$$I_J := \prod_{j \in J} I_j \cdot \prod_{j \notin J} (1 - I_j).]$$

(iv) $\mathbb{C}_{2m} \simeq End(\mathbb{S}_{2m})$ s izomorfismem algeber

$$\varphi(a)v := \underset{\text{Clifford. násobení}}{av}, \quad a \in \mathbb{C}_{2m} \text{ a } v \in \mathbb{S}_{2m}$$

Skutečně, $End(\underset{\mathbb{C}^{2^m}}{\underset{\parallel}{\mathbb{S}_{2m}}}) \underset{\text{volba báze v } \mathbb{S}_{2m}}{\simeq} Mat(2^m, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}_{2m}$.

# 3. Základní spinorové reprezentace Pin a Spin grupy



**Př.** Zajímají nás následující grupy:

(i) Nechť $V$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Potom $GL(V) := \{L : V \to V \mid L \text{ lineární invertibilní}\}$ s operací skládání tvoří grupu, tzv. obecnou lineární grupu na $V$. Máme-li na $V$ skalární součin, lze definovat její podgrupy $O(V)$ a $SO(V)$.

(ii) Nechť $V = \mathbb{R}^n$ s Euklid. skalárním součinem. Potom víme, že $Pin(n)$ [$Spin(n)$] jsou dvojnásobným nakrytím $O(n)$ [$SO(n)$].

**DEF.** Řekneme, že vektorový prostor $V$ je reprezentace grupy $G$ (jinak: $G$-modul), pokud na $V$ máme zadanou akci $G$, tzn. homomorfismus $\phi : G \to GL(V)$.

**Pozn:** Pojmy pro reprezentace grup zavedeme analogicky jako pro reprezentace algeber, např. ireducibilní reprez. atd.

**Př.** Nechť $G = GL(n)$ $(:= GL(\mathbb{R}^n))$, $O(n)$ nebo $so(n)$. (i) Potom definující reprezentace $G$ je $\mathbb{R}^n$ s akcí

$$\phi(g)v := gv, \quad g \in G \text{ a } v \in \mathbb{R}^n$$

Pozn: Často píšeme místo $\phi(g)v$ např. $g\cdot v$ nebo $gv$

Budou nás zajímat hlavně komplexní reprez. (snazší!)

(komplexní) definující repr. $G$ je $\mathbb{C}^n$ s akcí

$$\phi_{\mathbb{C}}(g)(\underset{\mathbb{C}^n}{\underset{\cap}{v+wi}}) := gv + igw, \quad g \in G \text{ a } v, w \in \mathbb{R}^n$$

(ii) Pro $0 \le k \le n$ definujeme reprezentaci $G$ na $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ [$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ nebo] jako

$$g\cdot(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := (gv_1) \wedge \dots \wedge (gv_k), \quad g \in G, \; v_j \in \mathbb{C}^n,$$

přičemž akci $G$ rozšíříme lineárně na celé $\Lambda^k \mathbb{C}^n$.

**Spinorové reprezentace**

Nechť $V$ je reprezentace $O(n)$ ~~[illegible]~~, resp. $so(n)$. Potom $V$ lze kanonicky přirozeně chápat jako reprezentaci $Pin(n)$, resp. $Spin(n)$, s akcí $\phi$, pro kterou $\phi(-1)$ je identické zobrazení. Platí to i obráceně:

(a) Skutečně, nechť $\psi: O(n) \to GL(V)$ je homomorf. grup. Nechť $\rho: Pin(n) \to O(n)$ je dvojnásob. nakrytí definované jako $\rho_s(x) := s x s^*$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in Pin(n)$.

Potom $\phi := \psi \circ \rho : Pin(n) \longrightarrow GL(V)$ je homomorf. a $\phi(-1) = \phi(1)$ je identita, protože $\rho(1) = \rho(-1)$.

(b) Obráceně: Nechť $V$ je repr. $Pin(n)$ s akcí $\phi$, pro kterou je $\phi(-1)$ identita. Definujme na $V$ akci $O(n)$ následovně

$A \in O(n)$, $A = \rho_s = \rho_{-s}$

$$\psi(\overset{A}{\rho_s}) := \phi(s), \quad s \in Pin(n)$$

Protože $\phi(s) = \phi(-s)$, definice $\psi$ je korektní (víme $\rho_s = \rho_{(-s)}$).

---

(Př.) (a) Nechť $n = 2m$. Potom $\$_{2m}$ tvoří ireduc. reprezentaci $Pin(n)$, protože $Pin(n) \subset \mathbb{R}_n \subset \mathbb{C}_n$ a $Pin(n)$ generuje $\mathbb{C}_n$. Prostory $\$^{\pm}_{2m}$ tvoří dvě různé ireducibilní reprezentace $Spin(n)$, protože

$\overset{\psi}{\mathbb{C}_I}$

$Spin(n) \subset \mathbb{R}^+_n \subset \mathbb{C}^+_n \simeq \mathbb{C}_{n-1}$ a $Spin(n)$ generuje $\mathbb{C}^+_n$.

Říkáme, že $\$_{2m}$ (resp. $\$^{\pm}_{2m}$) je základní spinorová reprezentace $Pin(n)$ (resp. $Spin(n)$).

Pozn: $\$_{2m}$ (resp. $\$^{\pm}_{2m}$) není reprezentace $O(n)$ (resp. $so(n)$). Skutečně, pro akci $\phi(s)v = sv$, $s \in Pin(n)$ a $v \in \$_{2m}$ platí $\phi(-1) = -1$

- identita.

§16

(b) Nechť $n = 2m-1$. Potom $S^{\pm}_{2m}$ jsou dvě různé základní spinorové reprez. $Pin(n)$, jedna protože $Pin(n) \subset \mathbb{R}_n \subset \mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}^{+}_{2m}$. Dále $S_{2m-2}$ je základní spinorová reprez. $Spin(n)$, protože $Spin(n) \subset \mathbb{R}^{+}_{n} \subset \mathbb{C}^{+}_{n} \simeq \mathbb{C}_{2m-2}$.

Pozn: Jako $Spin(n)$-reprezentace $S_{2m-2} \simeq S^{+}_{2m} \simeq S^{-}_{2m}$

Cv.

**Tv.** Grupy $Pin(n)$ a $Spin(n)$ mají spočetně mnoho různých ireducibilních (komplex. a konečně dimenzionál.) reprezentací.

(a) Fundamentální reprezentace $Pin(n)$ (tzn. ireduc. reprez., z kterých lze vyrobit ostatní ireduc. reprez. pomocí tzv. Cartanova součinu)

$m$

$\boxed{n = 2m}$ $\Lambda^r \mathbb{C}^n$, $r = 1, \dots, m-1$; $S_{2m}$

$\boxed{n = 2m-1}$ $\Lambda^r \mathbb{C}^n$, $r = 1, \dots, m-3$; $S^{\pm}_{2m}$

$m-1$

(b) Fundamentální reprezentace $Spin(n)$:

$\boxed{n = 2m}$ $\Lambda^r \mathbb{C}^n$, $r = 1, \dots, m-2$; $S^{\pm}_{2m}$

$\boxed{n = 2m-1}$ —"—, $r = 1, \dots, m-2$; $S_{2m-2}$

Podrobnosti např. v [FULTON, HARRIS: Representation Theory, a First Course, Springer, N.Y., 1991].