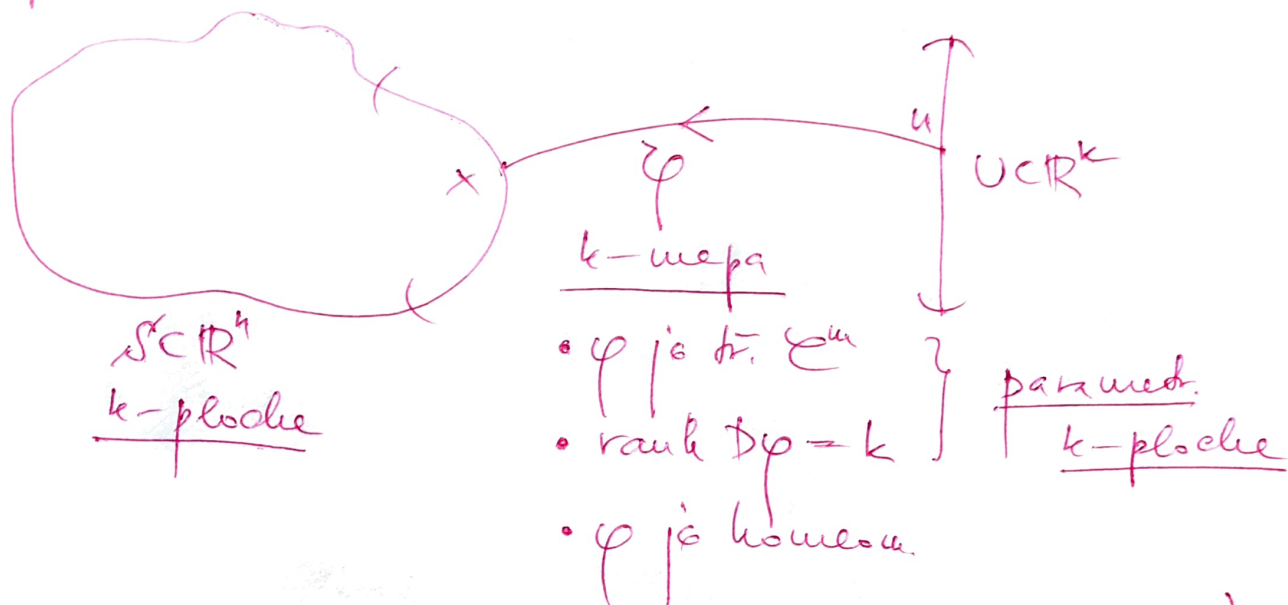


Průpomenutí:

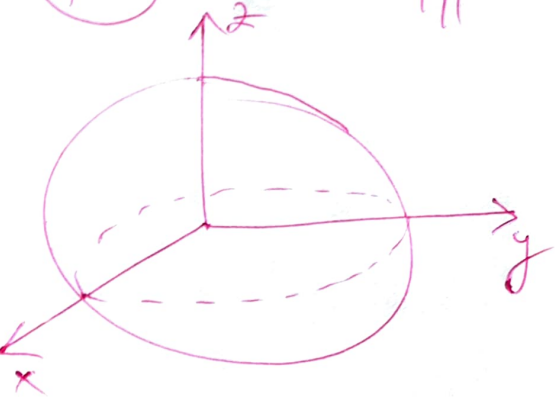


Pozn: Nodit S je k -ploche v $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset \neq S'$ je (relativně) otevřená podmnožina S , tm.
 $S' = S \cap V$ pro nějakou otevřenou $V \subset \mathbb{R}^n$,
 potom je množina $S' \subset \mathbb{R}^n$ také k -~~mapa~~ ploche.

Plouče je lokální grafom dle k

(Př.)

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$



Potom horní/dolní poloostrov
je grafom $z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

$$(x, y) \in B(0, 1) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Podobně $x = \dots, y = \dots$

Známá: Necht $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Pro $x \in \mathbb{R}^n$ píšeme $x_I := (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ a označme

$\pi_I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ projekci $\pi_I(x) := x_I$. Ztotožňujme

me $x \in \mathbb{R}^n$ s $(x_I, x_{I^c}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, kde

$$I^c := \{1, \dots, n\} \setminus I, \quad (\text{o mapě})$$

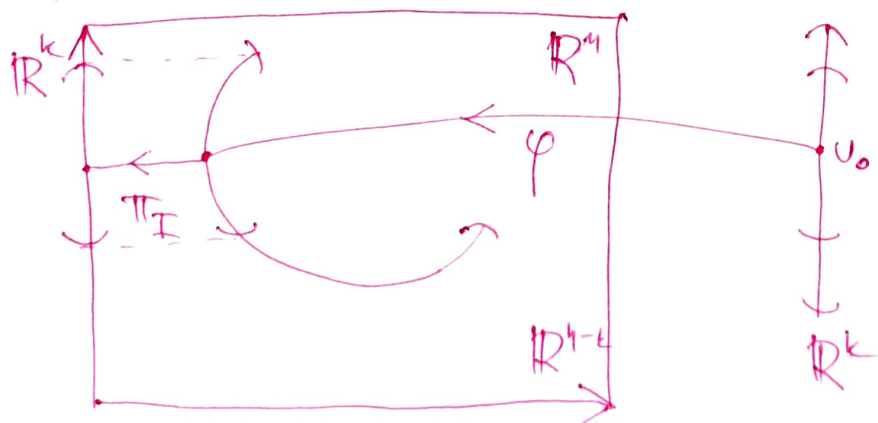
LEMMA: Necht $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je k -

kr. $\mathcal{C}^1$ ($n \geq 1$). Potom pro každé $u_0 \in U$

existuje jeho okolí $U_0 \subset U$ a k prvků

$I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že $\pi_I \circ \varphi|_{U_0}$ je difeo-

morfismus $\mathcal{C}^1$.



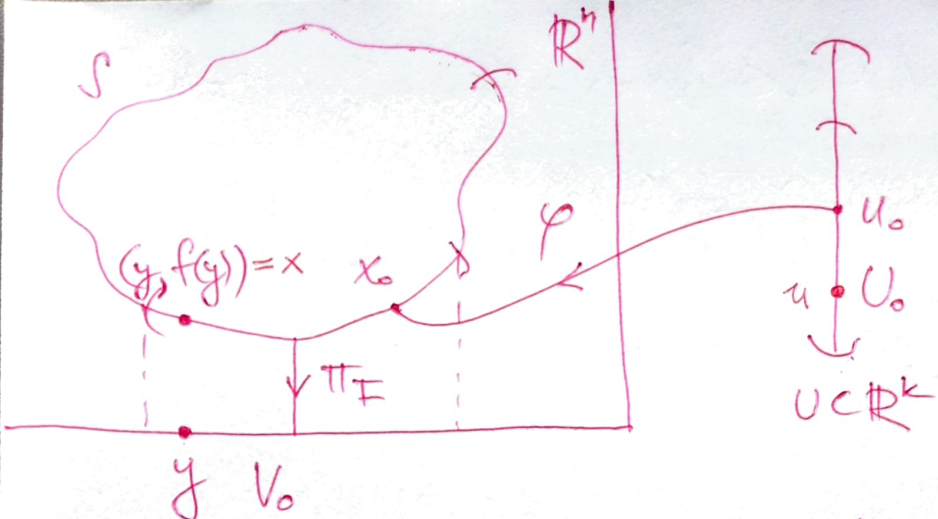
DŮKAZ: Proložte rank $\text{rank } D\varphi(u_0) = k$,
 existuje k -práhová $I \subset \{1, \dots, n\}$ taková, že

$$D(\pi_I \circ \varphi)(u_0) = \left(\frac{\partial \varphi_i(u_0)}{\partial u_j} \right)_{\substack{i \in I \\ j=1, \dots, k}}$$
 je regulární. Zbytek z věty o inverzní
 zobrazování. $\square$

DEF: Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -grafová funkce
 br. $\mathbb{R}^m$, pokud existuje otevřená $U \subset \mathbb{R}^k$,
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ br. $\mathbb{R}^m$ a k -práhová
 $I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že $S = \text{graf}_I f$,
 kde $\text{graf}_I f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_I \in U, x_{I^c} = f(x_I)\}$.
Pozn: Víme, že graf funkce je jednodušší
 plocha (pro $I = \{1, \dots, k\}$, obecně stejné).

VĚTA: Mužme $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha,
 právě když každé $x \in S$ má okolí $V \subset \mathbb{R}^n$
 takové, že $S \cap V$ je k -grafová funkce.

DŮKAZ: $\boxed{\Leftarrow}$ Jasně, $\boxed{\Rightarrow}$ Necht $x_0 \in S$,
 $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je map. S a $x_0 = \varphi(u_0)$
 pro $u_0 \in U$.



2 Lemmats existuje okoli $U_0 \subset U$ bodu u_0
 a k -prvkovo $I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že
 $\phi := \pi_I \circ \varphi|_{U_0}$ je diffeomorfizmus, spoe,
 $V_0 := \phi(U_0)$ je otvorená v $\mathbb{R}^k$.

Pro každé $y \in V_0$ definujeme

$$f(y) := (\pi_I \circ \varphi \circ \phi^{-1})(y)$$

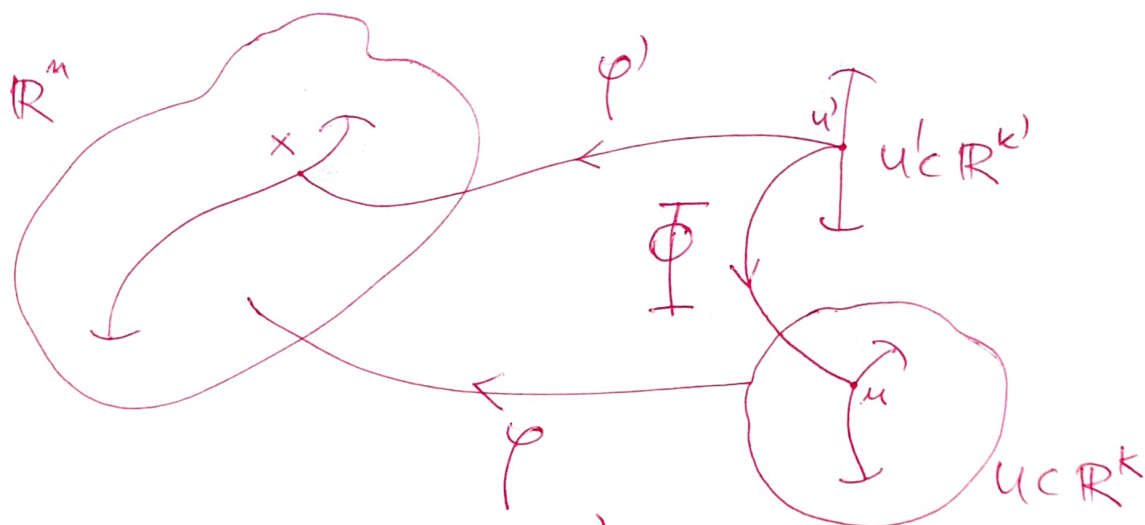
Potom máme $\pi_I \circ f = \langle \varphi \rangle|_{U_0}$. $\square$

LEMMA (o podmapáči)

616

Nechť $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je k -mappa dr. $\mathcal{E}^n$.
Nechť $\varphi': U' \subset \mathbb{R}^{k'} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení dr. $\mathcal{E}^{n'}$,
otevř.,
1 ≤ $n' \leq n$ a $\langle \varphi' \rangle \subset \langle \varphi \rangle$. Potom

- (i) $\Phi := \varphi^{-1} \circ \varphi': U' \rightarrow U$ je dr. $\mathcal{E}^{n'}$
- (ii) Je-li navíc φ' k' -mappa, potom $k' \leq k$ a Φ je k' -mappa v $\mathbb{R}^k$
- (iii) Je-li navíc φ' k' -mappa a $\langle \varphi' \rangle = \langle \varphi \rangle$,
potom $k' = k$ a Φ je diffeomorfismus
dr. $\mathcal{E}^{n'}$.



DŮKAZ: (i) Necht' $u' \in U'$ a $u = \varphi(u')$. Z Lemmatu
o mappách okolí $U_0 \subset U$ a k -prvků $I \subset$
 $\{1, \dots, n\}$ tak že $\pi_I \circ \varphi|_{U_0}$ je diffeomor-
fismus dr. $\mathcal{E}^k$. Zřejmě je ϕ spojitá. Potom ne
otevřelo $U_0' := \phi^{-1}(U_0)$ je

$$\phi = (\pi_I \circ \varphi)^{-1} \circ \pi_I \circ \varphi'$$

trvody $\mathcal{E}^{n'}$.

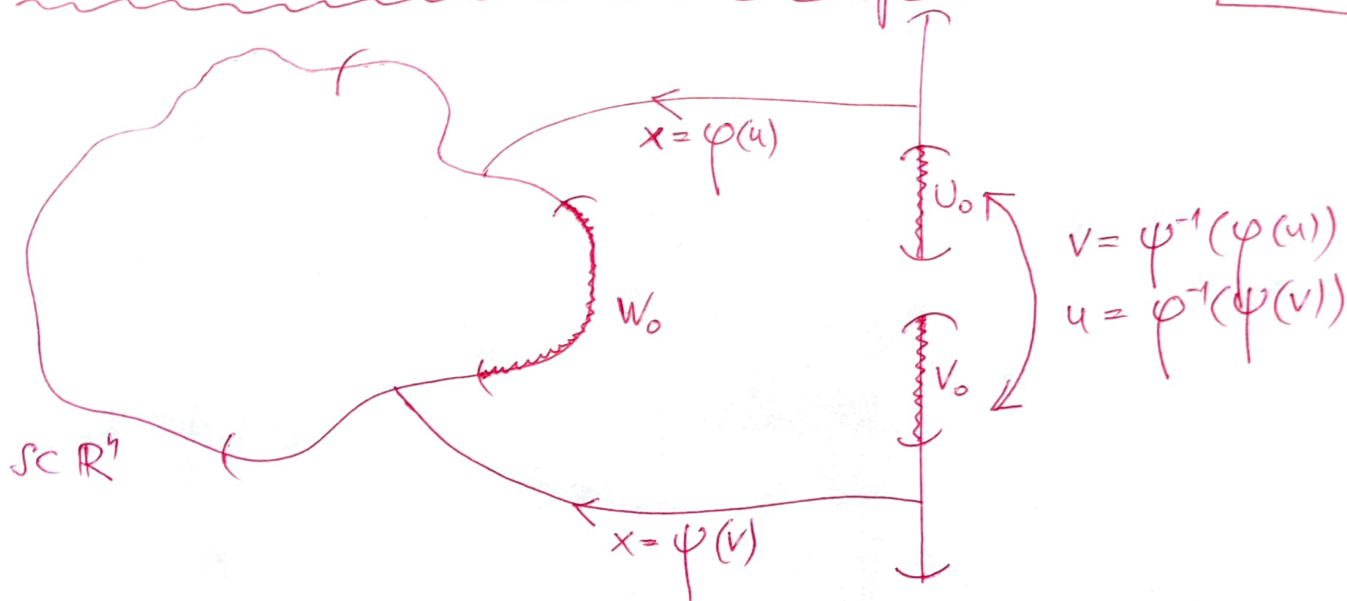
(ii) Το-λι παύς φ' μερα, φ' ϕ homeomorphism ma U' $\varphi' = \varphi \circ \phi$. C 16.1

Pro kardw $u' \in U'$ zi $\phi(u')$ prosto, prosto φ' $\varphi(u') = \varphi(\phi(u')) \circ \phi(u')$.

(iii) $\varphi(u')$ 

Преходом зображено між метрами

С 16.5



Нехай $\varphi \in \Psi$ і ψ існують k -метри площини $S \subset \mathbb{R}^k$ а
 $W_0 := \langle \varphi \rangle \cap \langle \psi \rangle \neq \emptyset$. Тоді W_0 є оточеною в S ,
 $U_0 := \varphi^{-1}(W_0)$ а $V_0 := \psi^{-1}(W_0)$ існують оточеною в $\mathbb{R}^k$.
Преходом зображено між φ а ψ розумно-
ме дифеоморфізму $\phi: U_0 \xrightarrow{\varphi} V_0$ а $\phi^{-1}: V_0 \xrightarrow{\psi} U_0$
 Кде $\phi := \psi^{-1} \circ \varphi$ а $\phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$.
 [Уві' Лемма о подмеріах (iii) про $\varphi|_{U_0}$ а $\psi|_{V_0}$.]

Розн: (i) Метри S де також метри локально координат-
ної системи на S а преходом зображено
 описують метри локальних координат
 (ii) Дименсія площини S є добре дефінована.
 (iii) Дименсія + Лемма о подмеріах плыве до
 катда метри k -площини S ме дименсію k .

Tocny prostor

617

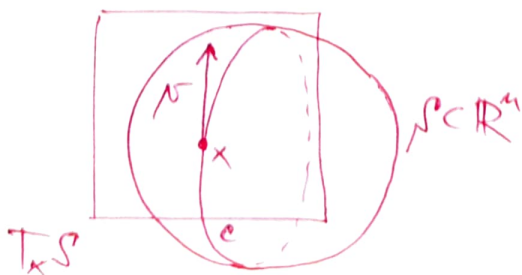
Umluva: Krivkou v $\mathbb{R}^n$ rozumíme $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
pro $\mathbb{R}$ a $n \geq 1$ definovanou na otevřeném inter-
valu $I \subset \mathbb{R}$.

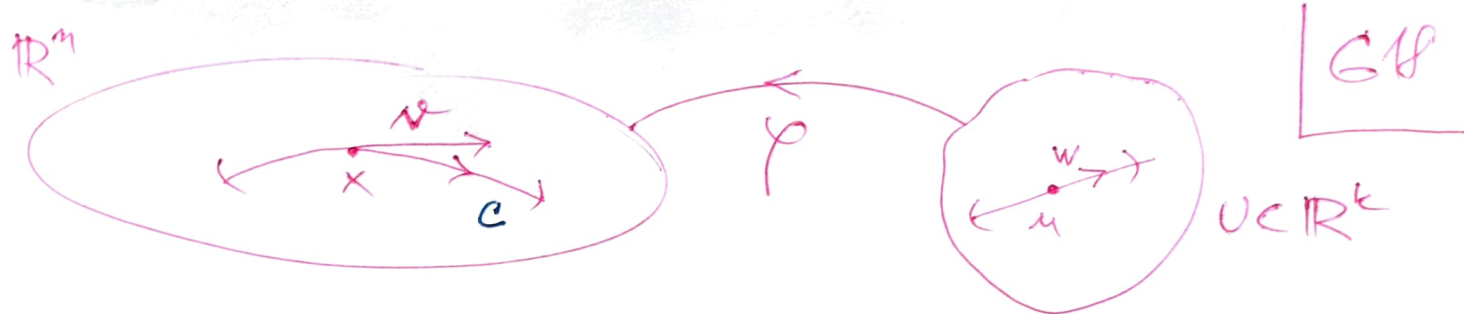
DEF. Tocným vektorem k ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ v
bode $x \in S$ je vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že ke
ploše S existuje křivka $c: I \rightarrow S$
a $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.
Množinu všech tocnych vektorů k S v $x \in S$
nazýváme $T_x S$ a nazýváme tocným prostorem
k S v x .

VEĚTA (o tocném prostoru) Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je
 k -plocha a $x \in S$. Potom $T_x S$ je k -rozměrný
vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$. Necht $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$
je mapa S a $x = \varphi(u)$ pro $u \in U$. Potom

$$(†) T_x S = \underset{\text{lineární obal}}{\text{LO}} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\} = D\varphi(u)(\mathbb{R}^k)$$

a $D\varphi(u)$ je izomorfismus $\mathbb{R}^k$ na $T_x S$.





DŮKAZ: Stačí dokázat (T), protože $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)$ jsou lineárně nezávislé.

☐ Necht' $v \in T_x S$, potom

$$v = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) w_i$$

pro nějaký $w := (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{R}^k$, potom

$$c(t) := \varphi(u + t \cdot w), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

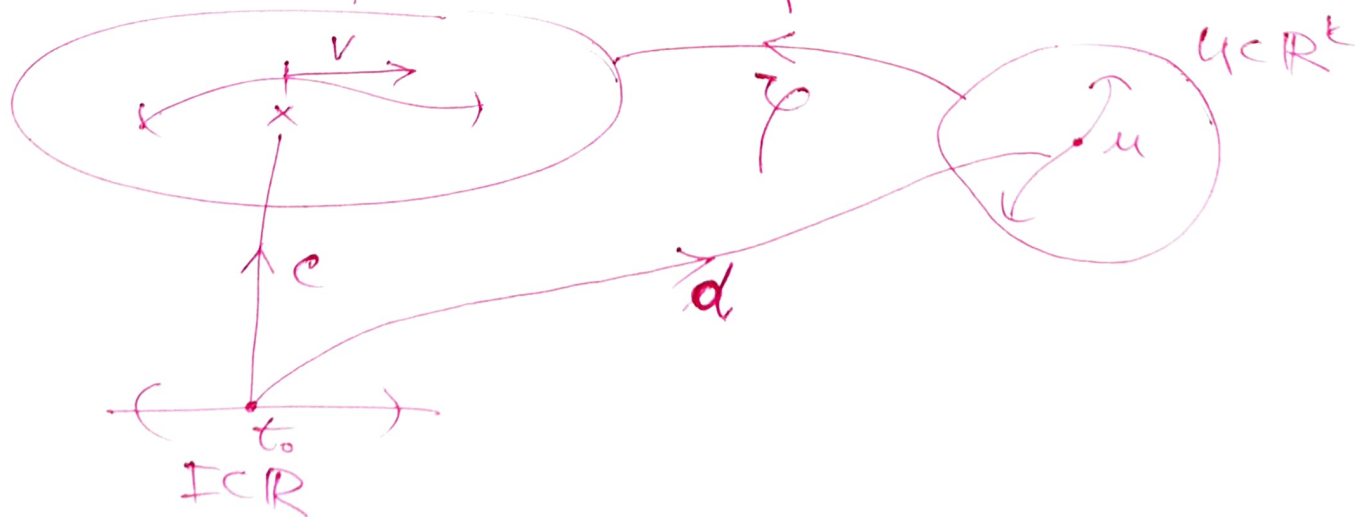
kde $\delta > 0$ je dost malé, je křivka ve S ,

$$c(0) = x \quad \text{a} \quad c'(0) = d\varphi(u) \cdot w = v \in T_x S,$$

☐ Necht' $v \in T_x S$, tm. ex. křivka $c: I \rightarrow S$

$$\text{a } t_0 \in I \text{ tak, že } c(t_0) = x \quad \text{a} \quad c'(t_0) = v.$$

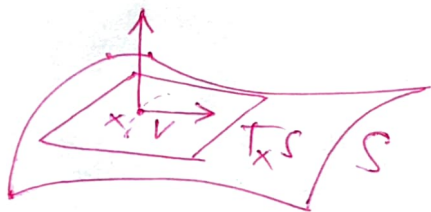
BŮHO: Předp., že $\langle c \rangle \subset \langle \varphi \rangle$.



7 Lemmat o podmappách (viz [G16]) [G19]
 říká, že $d := \varphi^{-1} \circ c : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$
 je křivka tří $\mathcal{C}^1$. Potom $c = \varphi \circ d$ a

$$\begin{aligned} v &= c'(t_0) = D\varphi(u)(d'(t_0)) = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_i} d_i'(t_0) \in \text{Lin}\{ \dots \}. \quad \square \end{aligned}$$

Pozn: (i) křivkou aduného prostoru $x + T_x S$
 ten aduný točový prostor



(ii) $T_x S^\perp$ nazýváme normálovým prostorem
 a jeho prvky normálovými vektory k
 ploše S v bodě x .

Zde $M^\perp := \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0 \ \forall v \in M \}$.