

Implikativní indukce plosky

Ukážeme, že 1.) podmínkou stačí

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \text{ je } (n-1)\text{-plocha.}$$

$$2.) S := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$ (2-stěna)

————— x —————

1.) $F(x) := x_1^2 + \dots + x_4^2 - 1$ je tri $\in \mathbb{R}^n$ a

$$dF(x) = 2 \cdot (x_1, \dots, x_4) = 0 \text{ pouze v } x = 0 \notin S^{n-1},$$

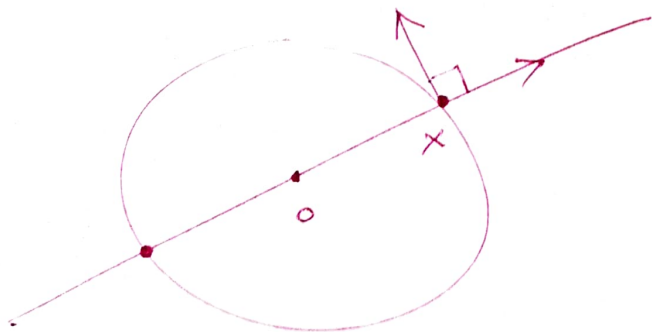
2.) $F(x) := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

je tri $\in \mathbb{R}^n$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid F(x) = 0\}$ a

$$dF(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ má hodnost 2}$$

pro každé $x \in S$. Je-li totiž $\text{rank } dF(x) < 2$,

potom $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$,
ale $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \notin S$.



Úrovňové množiny

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F: G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ je
 třídy C^m , $w_0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ a $S := F^{-1}(w_0) \neq \emptyset$!

Nechť $\text{rank } DF(x) = n-k$ v každém $x \in S$.

Potom je S k -plocha v $\mathbb{R}^n$ třídy C^m .

[DŮKAZ: Uvažme $\tilde{F} := F - w_0$.]

(Pr.) Vrstevnice ne měř, je-li F nadmořské
 výše



Sférická souřadnice

SFE 1

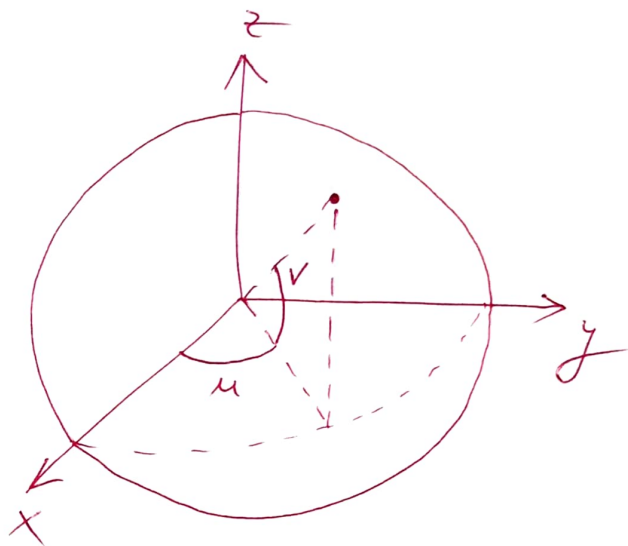
Nadef $\varphi(u, v) := (x, y, z)$, kde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ a

$$x = \cos u \cdot \cos v$$

$$y = \sin u \cdot \cos v$$

$$z = \sin v$$

u zeměpisná délka
 v šířka



(i) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je $\mathcal{C}^\infty$ a

$$D\varphi = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \cos v & -\cos u \cdot \sin v \\ \cos u \cdot \cos v & -\sin u \cdot \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}$$

Pozn: (a) Z množiny všech k -dimenzionálních objemů rovnoběžnostěn určených vektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ je roven $JL := \sqrt{\det(L^T L)}$, kde $L = (v_1, \dots, v_k)$ a $L^T L$ je Gramova matice $v_1, \dots, v_k$. Spec., $\text{rank}(L) = k$, právě když $JL > 0$.

(b) Nadef $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazování otevř.

do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Potom $\text{rank } D\varphi(u) = k$, právě

tedy $J\varphi(u) := \sqrt{\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u))} > 0$, je-li $u \in U$.

Uvažujeme, že $J\varphi(u)$ bude důležitá pro integraci ve plochách. Pokud φ je mapa plochy S , potom $J\varphi$ je ' hustota ' plochy w ve vektoru φ . Je-li $k=n$, potom

$$J\varphi(u) = |\det(D\varphi(u))|$$

je hustota w pro n -tý souřadnic $x = \varphi(u)$, viz část 0 substituce.

————— x —————

$$D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J\varphi = |\cos v| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Závěr: φ je parametriz. 2-plochy v $\mathbb{R}^3$ na

$$\mathbb{R}^2 - \{(u, v) \mid u \in \mathbb{R} \text{ a } v = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

(ii) $\varphi_0 := \varphi|_{(-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ jest mapą $S^2 \rightarrow S^2$

$$\langle \varphi_0 \rangle = S^2 \setminus \{ (x, 0, z) \mid x \leq 0, x^2 + z^2 = 1 \}$$

południe 180°

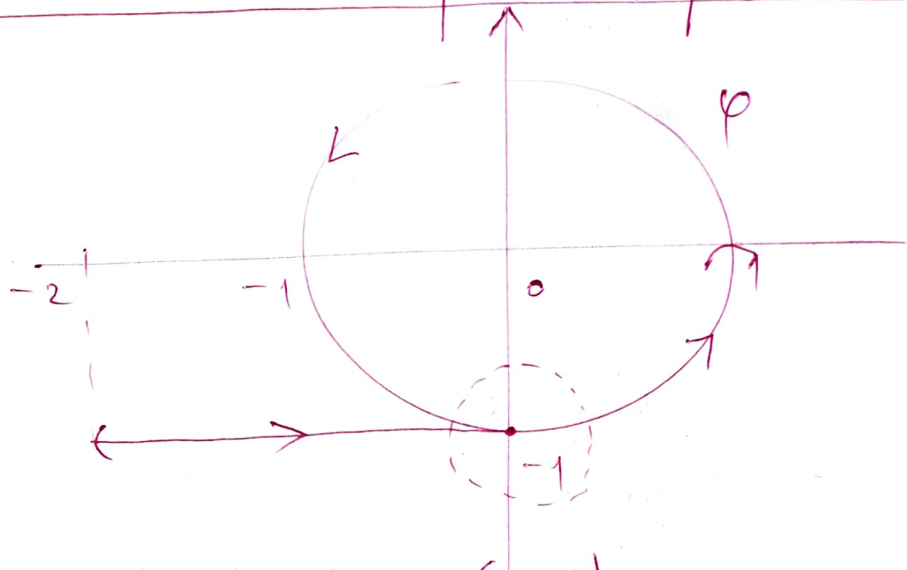
φ_0 jest homeomorfizmem (ist. przek. we Hom^3)

(iii) Należy znaleźć $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taki, aby φ_0 a $\rho \circ \varphi_0$ tworzy atlas S^2 .

(iv) Zmusz do zobaczenia pro S^{n-1} , *

homeomorfismus versus prostá spojitá zobrazení

$\mathbb{R}_{r_1}$



• Položme $\varphi(t) := (t-1)$, $t \in (-2, 0)$;
 $:= (\cos(-\frac{\pi}{2} + t), \sin(-\frac{\pi}{2} + t))$, $t \in [0, 2\pi)$

• Zřejmě φ je regulární parametrizace kruhu $\mathbb{S}^1$ a φ je prostá. Ale φ není homeomorfismus $(-2, 2\pi)$ na $\langle \varphi \rangle$, tm. φ není 1-1-mera.

Skutečně, $(\varphi^{-1})^{-1}((-2, \frac{\pi}{2})) = \varphi((-2, \frac{\pi}{2}))$
 není otevřené v $\langle \varphi \rangle$, protože bod $(0, -1)$
 není jeho vnitřní bod.

Pozor Browerova věta o invarianci (hluboká!) [1312]

Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřené, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ je prostá a
 spojitá. Potom $V := f(U)$ je otevřené v $\mathbb{R}^k$ a
 f je homeomorfismus.

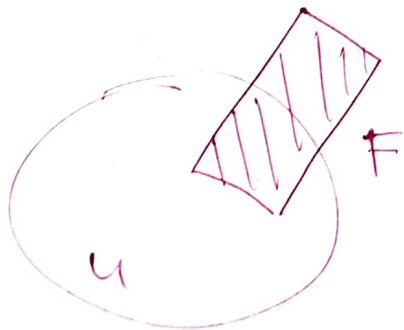
důsledek (invariance dimenze) Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ a $V \subset \mathbb{R}^l$
 jsou oba otevřené. Jsou-li U a V homeomorfní,
 potom $k = l$. [??] Nechť $k > l$ a $\varphi: U \xrightarrow{we} V$ homeomorf.
 Potom $f := \varphi \circ \varphi$ je prostá a spojitá z U do $\mathbb{R}^k$, kde
 $\varphi: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k$ je standardní vnořování. Ale $f(U)$ není
 otevřené v $\mathbb{R}^k$, spor. $k \neq l$

Necht $f: X \rightarrow Y$ je spojitý zobrazení
 mezi metrickými prostory* a X je kompaktní.
 1.) Potom je f uzavřený, tzn. pro každou
 uzavřenou $F \subset X$ je $f(F)$ uzavřený v Y .
 (kompaktní) (kompaktní)

Je-li navíc f prostý, potom je f homeo-
 morfiem X na $f(X)$.
 [Stejně, je-li $F \subset X$ uzavřený, je $(f^{-1})^{-1}(F) =$
 $f(F)$ uzavřený.]

2.) Necht $U \subset X$ a $f(U) \cap f(X \setminus U) = \emptyset$.
 Potom $f|_U: U \rightarrow f(U)$ je uzavřený.
 Je-li $f|_U$ navíc prostý, potom $f|_U$ je homeo-
 morfiem.

Je-li $F \subset X$ uzavřený, potom
 $f(F \cap U) = f(F) \cap f(U)$ je uzavřený v $f(U)$.
 uzav.



Pozn. * Platí to i pro
 Hausdorffovy topologické
 prostory X a Y .

PŮSLÉDEK Necht $G \subset \mathbb{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prostá spojité.
 Předpokládáme, že existuje spojité $\bar{\varphi}: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 které rozšiřuje φ . Je-li $\bar{\varphi}(\partial G) \cap \varphi(G) = \emptyset$,
 potom $\varphi: G \xrightarrow{\text{ue}} \varphi(G)$ je homeomorfismus.
 Máme, že $\bar{G}$ je kompaktní a $\bar{\varphi}$ je p usam-
 ňelý

Pozn: * Každé parametrické k -ploché $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$
 je lokálně k -množinou, tzn. každé $u_0 \in U$
 má okolí $U_0 \subset U$ takové, že $\varphi|_{U_0}$ je k -množina

1) Ex. okolí $V \subset U$ bodu u_0 , že $\varphi|_V$ je prostá,
 sloučená, protože $D\varphi(u_0)$ má hodnost k ,
 existuje její čtvercová $k \times k$ podmatice,
 která je regulární. Bůho: Předpokládáme, že

$$L := \left(\frac{\partial \varphi_i(u_0)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,k}$$

je regulární. Označme $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
 projekcí $\pi(x) := (x_1, \dots, x_k)$. Protože

$D(\pi \circ \varphi)(u_0) = L$, z věty o inverzi
 zobrazíme ex. okolí $V \subset U$ bodu u_0 tak, že
 $\pi \circ \varphi|_V$ je diffeomorfismus, tudíž prostá.
 Proto je $\varphi|_V$ prostá.

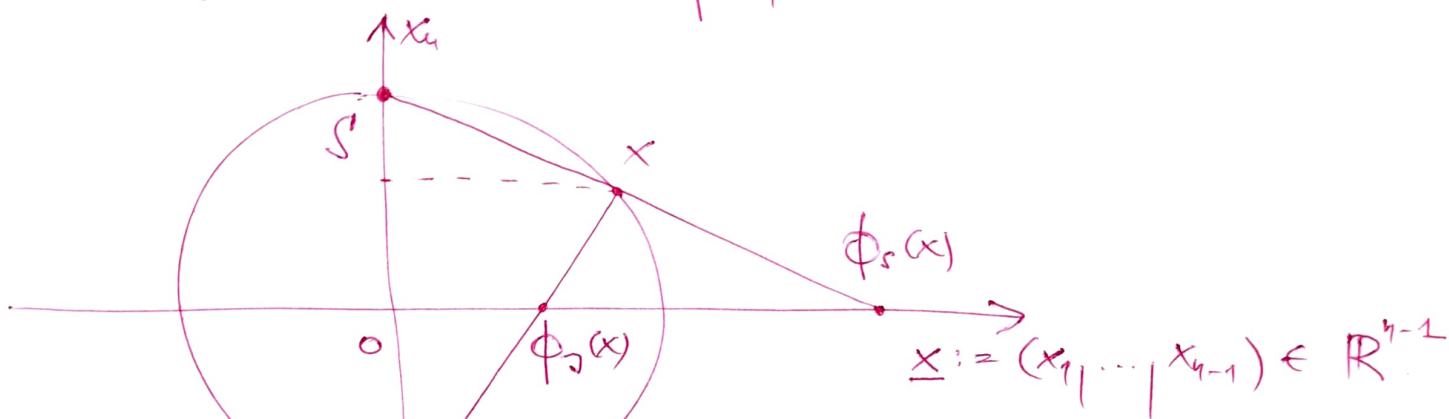
[komp]

(ii) Volume otvorenih okoli U_0 bodu u_0 tak
aby $\overline{U_0} \in V$. Potem je $\varphi|_{\overline{U_0}}$ homeomorfizem
na kompaktni prostor $\overline{U_0}$ a $\varphi|_{U_0}$ je mepa. $\square$

STEREOGRAFICKÁ PROJEKCE

SP1

Necht $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$.



Potom $\phi_S(x) := \frac{1}{1-x_n} \cdot \underline{x}$, $x \in S^{n-1} \setminus \{S\} =: U_S$,

(Cv.)

kde $S := (0, \dots, 0, 1)$ je "severní pól" S^{n-1} .

funkce $\phi_S: U_S \xrightarrow{\text{we}} \mathbb{R}^{n-1}$ je prostě spozitá

a $\phi_S^{-1}(y) := \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1} \mid \dots \mid \frac{2y_{n-1}}{\|y\|^2 + 1} \mid \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$

je hr. $\mathbb{C}$ a rank $(D\phi_S^{-1}) = n-1$ na $\mathbb{R}^{n-1}$ *),

Tedy ϕ_S^{-1} je mapa we S^{n-1} .

*) Zřejmě ϕ_S je hr. $\mathbb{C}$ dokonce we $\mathbb{R}^n \setminus \{x_n = 1\}$

a $\phi_S \circ \phi_S^{-1} = \text{id}$ na $\mathbb{R}^{n-1}$. Tedy $\forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\underbrace{\phi_S(x) \circ D\phi_S^{-1}(y)}_{\text{prostě}} = \text{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}$, kde $x = \phi_S^{-1}(y)$.

Potom $\{\phi_S^{-1} \mid \phi_J^{-1}\}$ je atlas S^{n-1} , je-li

$J := (0, 0, \dots, 0, -1)$ "jižní pól" S^{n-1} .

(Cr.) Ukážte, že $\phi_S(\phi_S^{-1}(y)) = \phi_S^{-1}(\phi_S(y)) \quad \text{SP2}$
 $= \frac{y}{\|y\|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$
 Eukl. norme v $\mathbb{R}^{n-1}$

Pozn: (i) Pro $n=3$ v G1 a UKA:

$$S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \infty \simeq \mathbb{CP}^1$$

Riemannova sféra reálna bod komplexná projektívna priamka

(ii) SP pro $n=3$ se užitají v kardografii
 pro vyobrazení map zemskeho povrchu.
 Mapy nezachovávají vzdálenosti, ale úhly
 ano. Tzn. SP nejsou izometrie, ale jsou
konformní transformace.