# Orientace plochy

**DEF.** (i) Orientací $k$-plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme spojité zobrazení $\tau : S \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ takové, že pro každý $x \in S$ je $k$-vektor $\tau(x)$ rozložitelný, $\|\tau(x)\| = 1$ a $\mathrm{Ker}\, \tau(x) = T_x S$. *)

Zde $\mathrm{Ker}\, \tau(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \wedge \tau(x) = 0 \}$.

(ii) Řekneme, že $k$-plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ je orientovatelná, pokud pro $S$ existuje orientace.

Orientovaná $k$-plocha je $k$-plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ s danou orientací $\tau$.

(Př) POZOR: Ex. neorientovatelné plochy, např. Möbiova páska (list) Cv.

**VĚTA:** Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá a orientovatelná $k$-plocha. Potom má $S$ právě dvě různé orientace.

**DŮKAZ:** (i) Nechť $\tau$ je orientace $S$. Potom $-\tau$ je zřejmě jiná (tzv. opačná vůči $\tau$) orientace $S$.

---

*) Pozn: $\tau(x)$ zadává orientaci $T_x S$ (viz. cvičení)

(ii) Nechť $\tau'$ je orientace $S$. Nechť $x \in S$. Potom $\operatorname{Ker} \tau(x) = T_x S = \operatorname{Ker} \tau'(x)$ a $\|\tau(x)\| = 1 = \|\tau'(x)\|$. Ze cvičení víme, že $\tau'(x) = \pm \tau(x)$.

Položme $\varepsilon(x) := \langle \tau'(x), \tau(x) \rangle$. Potom $\varepsilon : S \longrightarrow \{\pm 1\}$ je spojitá. Protože $S$ je souvislá, $\varepsilon = 1$ na $S$, nebo $\varepsilon = -1$ na $S$. Tudíž $\tau' = \tau$, nebo $\tau' = -\tau$. ∎

<u>Pozn:</u> Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je orientovatelná $k$-plocha. Má-li $S$ $\ell$ komponent, potom má $S$ $2^\ell$ různých orientací.

<u>DEF.</u> (i) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je <u>jednoduchá</u> $k$-plocha, tzn. $S = \langle \varphi \rangle$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je $k$-mapa. Potom

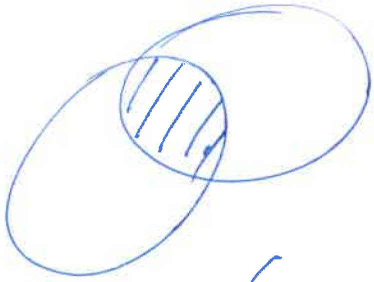
$$\tau_\varphi(x) := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\|}, \quad x \in \langle \varphi \rangle,\ x = \varphi(u);$$

je <u>orientace</u> na $S$ <u>indukovaná</u> <u>parametrizací</u> $\varphi$.

OR3

(ii) Řekneme, že dvě mapy $\varphi, \psi$ plochy $S$ jsou **souhlasně orientovány**, pokud

$$\tau_\varphi = \tau_\psi \text{ na } \langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle.$$



**Pozn:** Např. (také) je-li $\langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle = \emptyset$.

(iii) Atlas $\mathcal{A}$ plochy $S$ nazveme **orientovaným atlasem**, jsou-li každé dvě mapy $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ souhlasně orientované.

**Cv.** 1) Nechť $\tau$ je orientace na (souvislé) **jednoduché** ploše $S$. Potom ex. mapa $\varphi$ taková, že $S = \langle\varphi\rangle$ a $\tau = \tau_\varphi$.

- 2) Nechť $\mathcal{A}$ je **orientovaný** atlas na ploše $S$. Potom

$$\tau_{\mathcal{A}} := \tau_\varphi \text{ na } \langle\varphi\rangle \text{ pro každou } \varphi \in \mathcal{A}$$

je **orientace** $S$ **indukovaná atlasem** $\mathcal{A}$.

Je-li $\tau$ orientace na $S$, potom ex. orientovaný atlas $\mathcal{A}$ plochy $S$ takový, že $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

- 3) Mapy $\varphi, \psi$ plochy $S$ jsou souhlasně orientovány, právě když $\det(D\Phi) > 0$ na $Def(\Phi)$, kde $\Phi := \psi^{-1} \circ \varphi$.

definiční obor

# Plošný integrál 2. druhu

**DEF.** Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená a $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$, tzn. $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ pre nejakú $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Je-li $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ (tzn. $B \subset \Omega$ je borelovská), potom definujeme

(1) $\displaystyle\int_B \omega := \int_B f(x)\, d\lambda^n(x)$, konverguje-li integrál vpravo.

# Dualita mezi $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ a $\Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$

Pro $\omega \in \Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$ a $\alpha \in \Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ položme

$$\langle \omega, \alpha \rangle := \sum_I \omega_I \alpha_I,$$

je-li $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ a $\alpha = \sum_J \alpha_J e_J$.

Zřejmě je $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*) \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineární forma,

$$\langle dx_I, e_J \rangle = \delta_{IJ} := 1 \text{ pro } I = J, \quad := 0 \text{ pro } I \neq J,$$

a platí Schwarzova nerovnost

$$|\langle \omega, \alpha \rangle| \leq \|\omega\| \cdot \|\alpha\|$$

Pozn: (i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí 3 různé operace, které splynou, když ztotožníme $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ a $\Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rozšiřuje původní dualitu mezi $\mathbb{R}^n$ a $(\mathbb{R}^n)^*$

**DEF:** Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je $k$-plocha s orientací $\tau$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $S \subset \Omega$ a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Je-li $B \in \mathcal{B}(S)$, potom definujeme

$$(2) \qquad \int_B \omega := \int_B \langle \omega, \tau \rangle \, dS,$$

má-li integrál vpravo smysl.

spoj. na $S$

**Pozn:** (i) $\int_B \omega$ konverguje, je-li např. $B$ nebo $S$ kompaktní. Cv.

Skutečně, je-li $B \subset S$ kompaktní, potom $\lambda_S(B) < +\infty$.

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n$-plocha (tzn. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená) se standardní orientací $\tau := e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ na $\Omega$, potom $dS = d\lambda^n|_\Omega$ a (1) je totéž jako (2).

Lemma: Nechť $S = \langle \varphi \rangle$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je $k$-mapa, a $\tau = \tau_\varphi$ je orientace $S$ indukovaná $\varphi$. Potom pro $\omega$ a $B$ jako v DEF platí

$$(3) \qquad \int_B \omega = \int_{\underset{\underset{\mathbb{R}^k}{\cap}}{\varphi^{-1}(B)}} \varphi^{*}\omega,$$

$k$-forma

má-li jedna strana smysl.

DŮKAZ: Máme $\varphi^{*}\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I \circ \varphi \; d\varphi_I$ a $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$. Protože $d\varphi_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} du_j$ dostaneme $d\varphi_I = \det(D\varphi)_I \, du_1 \wedge \dots \wedge du_k$.

$k \times k$ minor

Proto
$$\int_{\varphi^{-1}(B)} \varphi^{*}\omega \overset{(1)}{=} \int_{\varphi^{-1}(B)} \sum_I (\omega_I \circ \varphi) \det(D\varphi)_I \, d\lambda^k(u) \qquad (4)$$

Máme ~~Protože~~ $J\varphi = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right\|$, je $(\tau \circ \varphi) \cdot J\varphi$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} = \sum_{|J|=k} \det(D\varphi)_J \, e_J,$$

Plückerovy souřadnice

protože $\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} e_i$.

Ze (4) plyne, že

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} \varphi^{*}\omega = \int_{\varphi^{-1}(B)} \left\langle \omega\circ\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \right\rangle d\lambda^k(u) =$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(B)} \langle \omega\circ\varphi, \tau\circ\varphi\rangle J\varphi \, d\lambda^k = \int_B \langle \omega, \tau\rangle \, dS. \quad \blacksquare$$

Pozn: (i) Většinou se $\int_B \omega$ definuje pro jednoduché plochy $S$ jako v (3) a pro obecné plochy $S$ pomocí tzv. rozkladu jednotky na $S$ (více analýza na navazujícím)

(ii) Na $S = \langle \varphi \rangle$ tedy máme

$$\int_B f \, dS = \int_{\varphi^{-1}(B)} (f\circ\varphi) J\varphi \, d\lambda^k = \int_{\varphi^{-1}(B)} (f\circ\varphi) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \right\| d\lambda^k,$$

$$\int_B \omega = \int_{\varphi^{-1}(B)} \left\langle \omega\circ\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \right\rangle d\lambda^k.$$

## Plošný integrál 2. druhu na zobecněných plochách

Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je zobecněná $k$-plocha, tzn. $S$ má rozklad $S = S_1 \cup \ldots \cup S_p \cup M_1 \cup \ldots \cup M_q$, kde $p \geq 1$, každá $S_j$ je jednod. $k$-plocha relativně otevřená v $S$ a všechny $M_i$ jsou plochy menší dimenze než $k$.

(i) Řekneme, že $\tau$ je <u>orientace</u> $S$, pokud $\tau|_{S_j}$ je orientace komponenty $S_j$ pro každé $j = 1, \ldots, p$.

(ii) Nechť $\tau'$ je orientace $S$ pro rozklad $S = S_1' \cup \ldots \cup S_{p'}' \cup M_1' \cup \ldots \cup M_{q'}'$. Řekneme, že <u>orientace</u> $\tau, \tau'$ na $S$ jsou <u>souhlasné</u>, pokud $\tau|_{S_j \cap S_{j'}'} = \tau'|_{S_{j'}' \cap S_j}$ pro každé $j, j'$.

**DEF** Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je zobecněná $k$-plocha s orientací $\tau$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $S \subset \Omega$ a $\omega \in \mathcal{E}^{*k}(\Omega)$. Potom definujeme pro každé $B \in \mathcal{B}(S)$

$$\int_B \omega := \int_B \langle \omega, \tau \rangle \, dS,$$ má-li integrál vpravo smysl.

**Pozn:** Snadno se ukáže, že $\int_B \omega$ nezávisí na rozkladu $S$ ani volbě souhlasné orientace.