Diferenciální formy

DF 1

Připomeň: Duální báze $(\mathbb{R}^n)^*$ značíme $dx_1, \dots, dx_n$, tzn. $dx_i(x) = x_i$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom $\omega \in \Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$ má tvar $\omega = \sum' \omega_I \, dx_I$, kde $\omega_I \in \mathbb{R}$ a $I \subset \{1, \dots, n\}$

DEF. (i) Diferenciální formou ω na otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $\omega : \Omega \to \Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$ třídy $\mathcal{C}^\infty$. Označme $\mathcal{E}^*(\Omega)$ vektor. prostor všech diferenc. forem na Ω. Každou $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ lze tedy jednoznačně psát jako

$$(1) \qquad \omega(x) = \sum_I{}' \omega_I(x) \, dx_I, \quad x \in \Omega,$$

kde $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\omega_I \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, jsou-li $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ prvky I.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ a $\omega(\Omega) \subset \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$, potom říkáme, že ω má stupeň k (tzv. k-formu). Označme $\mathcal{E}^k(\Omega)$ vektor. prostor všech k-forem na Ω.

Pozn: (i) každá $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ má tvar (1), kde sčítáme přes $|I| = k$. DF2

(ii) Značme $\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\mathcal{E}^0(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ hladké funkce, 0-formy

DEF. Na $\mathcal{E}^*(\Omega)$ definujeme vnější násobení

$$(\omega \wedge \tau)(x) := \omega(x) \wedge \tau(x), \quad x \in \Omega \text{ a } \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega).$$

Vnější (de Rhamův) diferenciál

DEF. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Potom definujeme zobrazení $d: \mathcal{E}^*(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^*(\Omega)$ následovně:

(i) Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{E}^\infty(\Omega)$, potom

$$df(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \quad x \in \Omega.$$

(ii) Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ je jako v (1), tzn. $\omega = \sum \omega_I dx_I$ s $\omega_I \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$. Potom

$$d\omega := \sum_I d\omega_I \wedge dx_I \text{ na } \Omega.$$

Tvar v základním tvaru

VĚTA: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ a $p = 0, \dots, n$. Potom

(i) d je lineární zobrazení a pro každou $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$ je $d\omega \in \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$. Zde $\mathcal{E}^{n+1}(\Omega) := 0$.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, potom

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau$$

(iii) $d(d\omega) = 0$, neboli $d \circ d = 0$.

Důkaz: (i) Snadno z linearity $\wedge$, d na funkcích a definice.

(ii) Protože d je lineární, stačí to ukázat pro $\omega = \omega_I \, dx_I$ a $\tau = \tau_J \, dx_J$, kde $|I| = p$ a $I \cap J = \emptyset$. Potom

$$d(\omega \wedge \tau) = d(\omega_I \tau_J) \wedge \underbrace{dx_I \wedge dx_J}_{\substack{\parallel \\ \pm \, dx_{I \cup J}}} \quad \text{a}$$

$$d(\omega_I \tau_J) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i} \cdot dx_i \underset{\text{Leibniz}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right) dx_i .$$

Tedy
$$d(\omega \wedge \tau) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J \, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$dx_i \wedge dx_I = (-1)^p dx_I \wedge dx_i$

$$= d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau$$

(iii) Je-li $f \in C^\infty(\Omega)$, potom

$$d(df) = d\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{j=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \wedge dx_j$$

DFT

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j \underset{\substack{\text{stačí}\\ \text{pro } i\neq j}}{=}$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)}_{= 0} dx_i \wedge dx_j = 0.$$

b) Stačí ukázat pro $\omega = \omega_I\, dx_I$. Máme

$d\omega = d\omega_I \wedge dx_I$ a

$$d(d\omega) \overset{(iii)}{=} \underbrace{d(d\omega_I)}_{\overset{\alpha)}{=}0} \wedge dx_I - d\omega_I \wedge \underbrace{d(\overset{1.}{d}x_I)}_{= 0 \text{ z def.}}$$

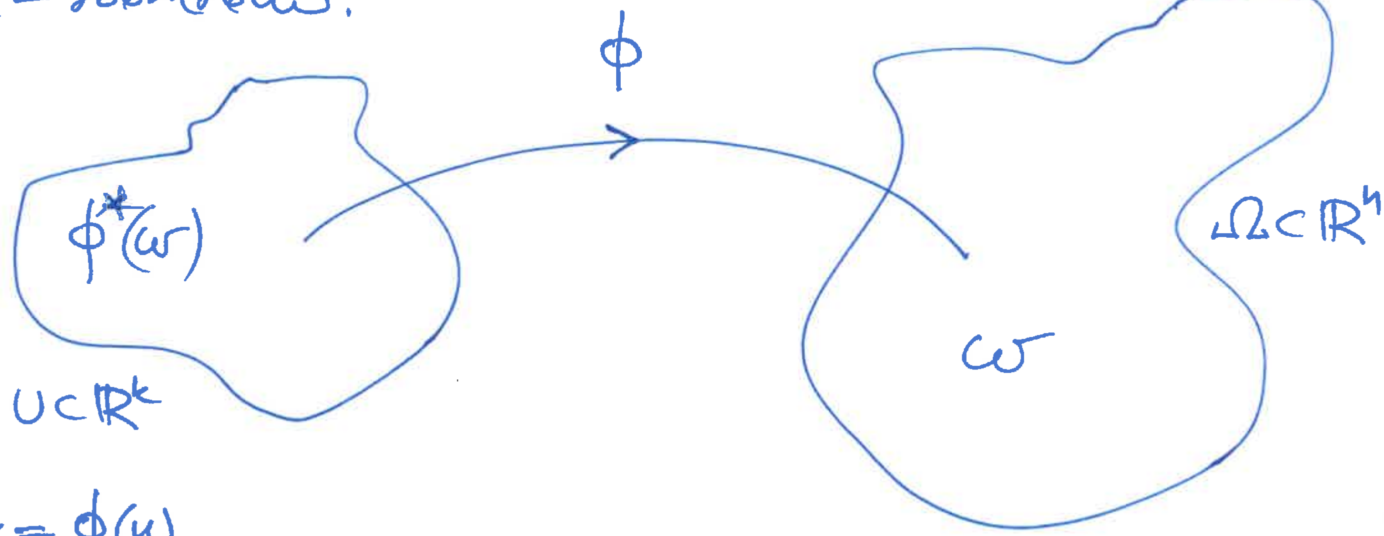
$\blacksquare$

Přenos diferenciálních forem

OTÁZKA: Jak se změní dif. forma ω při změně souřadnic?

— x —

V této části předpokládáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené a $\phi : U \to \Omega$ je $\mathcal{C}^\infty$-zobrazení.



$x = \phi(u)$

$x_i = \phi_i(u_1, \dots, u_k)$ je i-tá složka ϕ

DEF. Za předpokladů jako výše definujeme zobrazení $\phi^* : \mathcal{E}^*(\Omega) \to \mathcal{E}^*(U)$ jako

$$\phi^*(\omega) := \sum_I (\omega_I \circ \phi)\, d\phi_I,$$

kde $\omega = \sum \omega_I \, dx_I$ je tvaru (1) a

$d\phi_I := d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_\ell}$, jsou-li $1 \le i_1 < \dots < i_\ell \le n$ prvky I.

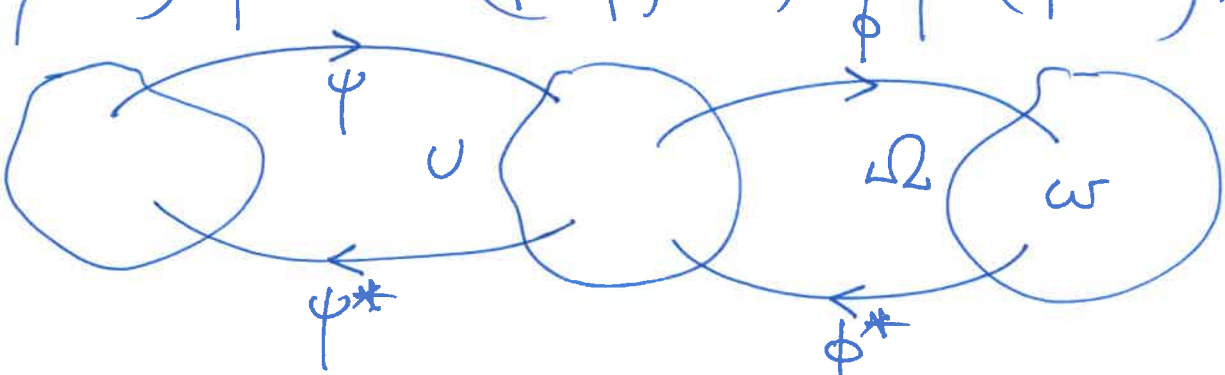
VĚTA: Nechť ϕ je jako výše a $\omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega)$. DF7

Potom (i) ϕ^* je lineární;

(ii) $\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$;

(iii) $\phi^*(d\omega) = d\left(\phi^*(\omega)\right)$.

(iv) Je-li $V \subset \mathbb{R}^\ell$ otevřená a $\psi : V \to U$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$, potom $(\phi \circ \psi)^*(\omega) = \psi^*\left(\phi^*(\omega)\right)$.



(v) Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I \, dx_I$.

Potom $\phi^*(\omega) = \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \phi) \det (D\phi)_I \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$,

kde $(D\phi)_I$ je $k \times k$ podmatice $D\phi$ obsahující řádky I.

DŮKAZ: (i) jasné z definice;

(ii) Díky linearitě ϕ stačí to ukázat pro $\omega = \omega_I \, dx_I$ a $\tau = \tau_J \, dx_J$, $I \cap J = \emptyset$.

Máme $\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*\left(\omega_I \tau_J \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \, J \\ I \cup J \end{pmatrix} dx_{I \cup J}\right) =$

$$= (\omega_I \circ \phi) \cdot (\tau_J \circ \phi) \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \, J \\ I \cup J \end{pmatrix} d\phi_{I \cup J}}_{d\phi_I \wedge d\phi_J} = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau).$$

DF8

(iii) α) Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, potom

$$\underset{\phi^*(f)}{d(f\circ\phi)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial u_j} du_j = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\phi\right)\frac{\partial\phi_i}{\partial u_j} du_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\phi\right) d\phi_i = \phi^*(df)$$

β) Stačí pro $\omega = \omega_I dx_I$. Máme

$$d(\phi^*\omega) = d(\omega_I\circ\phi\, d\phi_I) = d(\omega_I\circ\phi)\wedge d\phi_I$$

$$+ (\omega_I\circ\phi)\underbrace{d(d\phi_I)}_{\overset{(?)}{=}0} \underset{\alpha)}{=} \phi^*(d\omega_I)\wedge\phi^*(dx_I) \overset{(ii)}{=}$$

$$= \phi^*(d\omega),$$ protože platí (?) : Indukcí.

- Pro $\ell = 1$ je $d(d\phi_{i_1}) = 0$.
- $\boxed{\ell-1 \leadsto \ell}$ Máme $d(d\phi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{i_\ell}) =$

$$= \underbrace{d(d\phi_{i_1})}_{=0}\wedge d\phi_{i_2}\wedge\ldots\wedge d\phi_{i_\ell} - d\phi_{i_1}\wedge \underbrace{d(d\phi_{i_2}\wedge\ldots}_{=0}$$

$$\wedge\, d\phi_{i_\ell}).$$

indukční předpoklad

(iv) α) Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, potom

$$(\phi\circ\psi)^*(f) = f\circ\phi\circ\psi = \psi^*(\phi^*(f))$$

β) Je-li $\omega = dx_i$, potom $(\phi\circ\psi)^* dx_i =$

$$= \sum_{j=1}^{\ell}\frac{\partial(\phi\circ\psi)_i}{\partial v_j} dv_j = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial u_t}\circ\psi\right)\frac{\partial\psi_t}{\partial v_j} dv_j$$

$$= \sum_{t=1}^{k} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u_t} \circ \psi\right) d\psi_t = \psi^*(d\phi_i) =$$

$$= \psi^*(\phi^*(dx_i)).$$

3) Pro obecné $\omega \in \mathcal{E}^{k*}(\Omega)$ to plyne z α), β), (i), (ii).

(V) Protože $d\phi_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} du_j$, platí

$$d\phi_I = d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} = \det(D\phi)_I \, du_1 \wedge \dots \wedge du_k.$$

jako důkaz L. o Plückerových souřadnicích

Skutečně $(D\phi)_I$ je matice přechodu mezi $du_1, \dots, du_k$ a $d\phi_{i_1}, \dots, d\phi_{i_k}$. ∎