Hodgeův operátor [⊗ viz. níže]

Nechť V je vekt. prostor se skalárním součinem $\langle \cdot , \cdot \rangle$ a ON-bází $e_1, \dots, e_n$. Položme $\omega := e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Nechť $\lambda \in \Lambda^k(V)$. Potom zobrazení $y \in \Lambda^{n-k}(V) \longmapsto \lambda \wedge y \in \Lambda^n(V)$ je lineární. Zřejmě pro každé $y \in \Lambda^{n-k}(V)$ je $\lambda \wedge y = f_\lambda(y)\,\omega$ a $f_\lambda : \Lambda^{n-k}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ je rovněž lineární. Z Rieszovy věty existuje jediný $*\lambda \in \Lambda^{n-k}(V)$ takový, že

$$f_\lambda(y) = \langle *\lambda, y \rangle, \quad y \in \Lambda^{n-k}(V),$$

neboli

$$\boxed{\lambda \wedge y = \langle *\lambda, y \rangle\, \omega \quad \forall y \in \Lambda^{n-k}(V)}.$$

DEF Lineární zobrazení $* : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ se nazývá <u>Hodgeův operátor</u>.

⊗ **Pozn:** Vekt. prostory $\Lambda^k(V)$ a $\Lambda^{n-k}(V)$ jsou izomorfní, protože mají stejnou dimenzi.

Vlastnosti:

(1) Pro $k=0,\dots,n$ je $*$ izomorfismus a izometrie $\Lambda^k(V)$ na $\Lambda^{n-k}(V)$

(2) $*(*v) = (-1)^{k\cdot(n-k)} v, \quad v \in \Lambda^k(V)$

(3) $*$ je lineární rozšíření na izomorfismus a izometrii $\Lambda^*(V)$ na $\Lambda^*(V)$.

Důkaz: ad (1) Stačí $* \varphi_I = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \mid I^c \\ 1,\dots,n \end{pmatrix} \varphi_{I^c}$, je-li $|I| = k$ a $I^c := \{1,\dots,n\} \setminus I$.

Skutečně, $\varphi_I \wedge \varphi_J = 0$, je-li $J \neq I^c$;

$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \mid I^c \\ 1,\dots,n \end{pmatrix} \omega$, je-li $J = I^c$.

ad (2) $*(*\varphi_I) = \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \mid I^c \\ 1,\dots,n \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I^c \mid I \\ 1,\dots,n \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \mid I^c \\ I^c \mid I \end{pmatrix} = (-1)^{k(n-k)}} \varphi_I$

(Př.) Jsou-li $v_1,\dots,v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, potom

$$*(v_1 \times \dots \times v_{n-1}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}.$$

Skutečně, polož $v_0 := * v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ a $\forall w \in \mathbb{R}^n$:

$\underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge w}_{= \det(v_1|\dots|v_{n-1}|w)\,\omega} = \langle v_0, w \rangle \omega$, tzn. $\langle w, v_0 \rangle = (-1)^{n-1} \times \det(w|v_1|\dots|v_{n-1})$, tudíž $v_0 = * v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = (-1)^{n-1} v_1 \times \dots \times v_{n-1}$.

CB1

Úmluva: $\mathbb{R}^n$ chápeme jako Euklidovský prostor se standardní bází $e_1, \dots, e_n$, s Euklid. skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$ a normou $\| \cdot \|$, které se dodefinují na celé $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ jako výše, tj. na přednášce. Zde

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \{\alpha = \sum \alpha_I e_I \mid \alpha_I \in \mathbb{R},\ I \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Objem rovnoběžnostěnu

Nechť $1 \le k \le n$ a $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Pro matici $W = \underset{n \times k}{(v_1, \dots, v_k)}$ platí

$$(*) \qquad \sqrt{\det(W^T W)} = \| v_1 \wedge \dots \wedge v_k \|,$$

což je rovno k-dim. objemu rovnoběžnostěnu $R = R(v_1, \dots, v_k)$ určeného vektory $v_1, \dots, v_k$.

x

Skutečně, z Cauchy–Binetova vzorce plyne

$$(CB) \qquad \det(W^T W) = \sum_{|J| = k} (\det W_J)^2.$$

Rovnost $(*)$ dostaneme z přednášky.

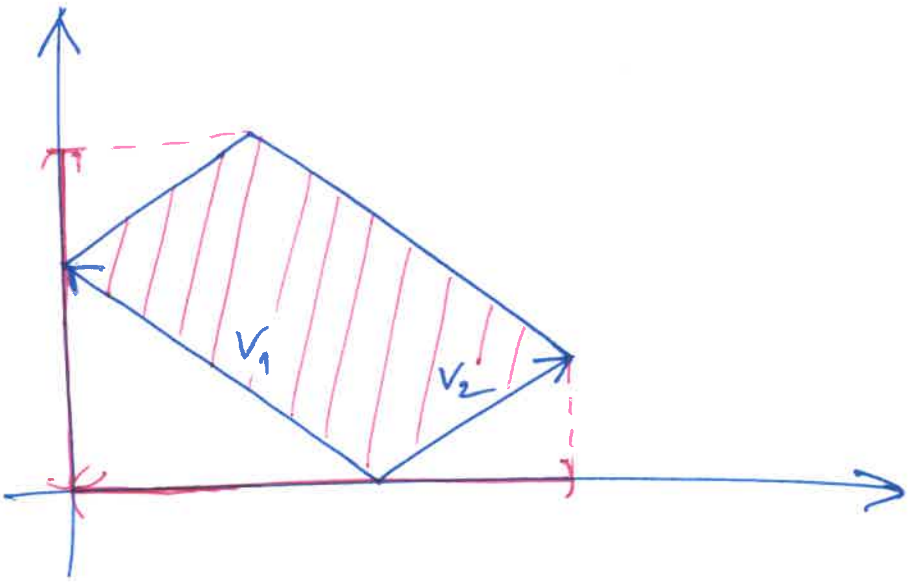
Pozn: (i) Spec. je-li φ k-mapa v $\mathbb{R}^n$, potom

$$J\varphi = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right\|;$$

$$= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right\|, \text{ je-li } k = n-1.$$

CB2

(ii) Geometrický význam (CB): $|\det W_J|$ je objem projekce R na souřadnicovou rovinu x_J.



DU 1

Připomenutí: Duální prostor

(i) Nechť V je vektorový prostor a $e_1, \dots, e_n$ je báze V. Potom

$$V^* := \{\alpha : V \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ lineární}\}$$

kovektory

je duální prostor k V. Báze V^* duální k $e_1, \dots, e_n$ je tvořena $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$, pro které

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j := 1, \text{ je-li } i = j; \quad = 0, \text{ je-li } i \neq j.$$

(ii) Druhý duál $V^{**} := (V^*)^*$ ztotožňujeme s V. Skutečně, zobrazení $\varkappa : V \to V^{**}$ definované jako $\varkappa(v)(\alpha) := \alpha(v)$, $v \in V$ a $\alpha \in V^*$, je kanonický izomorfismus V na V^{**}. Skutečně, $\varkappa$ je zřejmě prosté a lineární a $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$.

DU2

Značení: Bázi $(\mathbb{R}^n)^*$ duální ke standardní bázi $e_1, \dots, e_n$ prostoru $\mathbb{R}^n$ budeme značit $dx_1, \dots, dx_n \in (\mathbb{R}^n)^*$, tzn.

$$dx_i(x) := x_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Potom $\Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*) = \left\{ \omega = \sum \omega_I \, dx_I \;\middle|\; \omega_I \in \mathbb{R} \text{ a } I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$.

Pozn.: (i) $\underset{\text{k-kovektor}}{\omega \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)}$ lze realizovat jako antisymetrické k-lineární formy (k-tenzory)

$$\omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ krát}} \longmapsto \mathbb{R}.$$

(ii) Zde $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, kde $I := \{i_1, \dots, i_k\}$ a $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.