A1) Vnější algebra

<u>OTÁZKA</u>: Jak násobit vektory z $\mathbb{R}^n$?

1.) 'Geometrické' násobení na $\mathbb{R}^n$, tzn. zachovávající Euklid. normu $\|x\cdot y\| = \|x\|\cdot\|y\|$, ex. pouze v dimenzi $n = 1, 2, 4, 8$, a to $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
kom.	✓	✓	×	×
asoc.	✓	✓	✓	×

Pro obecné n máme <u>Cliffordovu algebru</u> $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^n) \supsetneq \mathbb{R}^n$.

2.) Tenzory. Antisymetrické tenzory.

<u>HEURISTIKA</u>: Jak zavést (asociat.) násobení vektorů z $\mathbb{R}^n$, aby bylo <u>antikomutativní</u>?
(tzn. $x \wedge y = -y \wedge x$)

$\mathbb{R}^n$: $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ ... <u>vektor</u>

$x \wedge y = (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) \wedge (y^1 e_1 + \dots + y^n e_n)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \, e_i \wedge e_j$ ... <u>bivektor</u>

$e_i \wedge e_i = -e_i \wedge e_i = 0$

$e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$

$x \wedge y \wedge z = \dots$

1

$e_1, \dots, e_n$

$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots$

$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \dots$

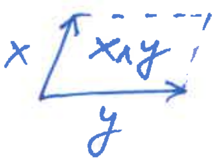
$\vdots$

$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

<u>Geometrický význam</u>

orientovaná délka úsečky

Cv.



orientovaná plocha rovnoběžníku

atd.

Připomenutí: (i) Algebra nad tělesem $\mathbb{k} (= \mathbb{R})$ | DIF2

je vektorový prostor A nad $\mathbb{k}$ s bilineárním zobrazením (tzv. násobením) $m: A \times A \to A$.

(ii) Algebra A je asociativní, pokud

$\forall a,b,c \in A: \quad (ab)c = a(bc).$

Zde píšeme místo $m(a,b)$ krátce $a \cdot b$.

Algebra A má jednotku, pokud ex. $1 \in A$ taková, že $\forall a \in A: \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

DEF. (i) Nechť V je reálný vektorový prostor s danou bází $e_1, \dots, e_n$. Nechť

$$\mathcal{B} := \{ e_I \mid I \subset \{1, \dots, n\} \}$$

je množina taková, že $e_\emptyset := 1 \in \mathbb{R}$ a $e_{\{i\}} := e_i$, $i = 1, \dots, n$. Označme $\Lambda^*(V)$ vektorový prostor s bází $\mathcal{B}$, tzn. každý $\alpha \in \Lambda^*(V)$ lze jednoznačně psát jako

$$\alpha = \sum_I \alpha_I e_I, \quad \text{kde } \alpha_I \in \mathbb{R} \text{ a } I \subset \{1, \dots, n\}.$$

(ii) Vnější součin na $\Lambda^*(V)$ definujeme následovně. Jsou-li $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, potom

$$e_I \wedge e_J := 0, \quad \text{je-li } I \cap J \neq \emptyset;$$
$$:= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} e_{I \cup J}, \quad \text{je-li } I \cap J = \emptyset.$$

Zde $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I\cup J\end{pmatrix}$ je znaménko permutace

$$\begin{pmatrix} \overbrace{i_1,\dots,i_k}^{I,\ \text{rost.}}, \overbrace{j_1,\dots,j_\ell}^{J,\ \text{rost.}} \\ \underbrace{m_1, m_2, \dots, m_{k+\ell}}_{I\cup J,\ \text{rost.}} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} i_1<\dots<i_k \\ j_1<\dots<j_\ell \\ m_1<\dots<m_{k+\ell} \end{matrix}$$

Je-li $\alpha, \beta \in \Lambda^*(V)$, potom

$$\alpha\wedge\beta := \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J \, e_I \wedge e_J .$$

Vlastnosti:

1. $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$

2. Pro $k=0,\dots,n$ položme

$$\Lambda^k(V) := \Big\{\alpha\in\Lambda^*(V) \;\Big|\; \alpha = \overbrace{\sum_{\underset{\uparrow\ \text{počet prvků } I}{|I|=k}} \alpha_I e_I}^{k\text{-vektory}} \Big\}.$$

Potom $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$ a $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$.

Speciálně, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ a $\Lambda^1(V) = V$.

3. $e_I = e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$, je-li $I=\{i_1,\dots,i_k\}$ a $1\le i_1<\dots<i_k\le n$.

4. $(\Lambda^*(V), \wedge)$ je asociativní algebra s jednotkou, tzv. vnější (Grassmannova) algebra V.

(5.) Je-li $\omega \in \Lambda^k(V)$ a $\tau \in \Lambda^\ell(V)$, potom $\omega \wedge \tau = (-1)^{k\ell}\, \tau \wedge \omega \in \Lambda^{k+\ell}(V)$.

DIF 4

---

ad (4.) Díky bilinearitě $\wedge$ stačí asociativitu dokázat pro bázové prvky, tzn.

$$(\times) \quad (\varphi_I \wedge \varphi_J) \wedge \varphi_K = \varphi_I \wedge (\varphi_J \wedge \varphi_K).$$

Pokud I, J, K nejsou po dvou disjunktní, potom zřejmě obě strany $(\times)$ jsou nulové. Jinak

$$(\varphi_I \wedge \varphi_J) \wedge \varphi_K = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I\cup J \end{pmatrix} \varphi_{I\cup J} \wedge \varphi_K =$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I\cup J, K \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\cup J, K \\ I\cup J \cup K \end{pmatrix} \varphi_{I\cup J\cup K}$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I\cup J\cup K \end{pmatrix} \varphi_{I\cup J\cup K} \underset{\text{podobně}}{=} \varphi_I \wedge (\varphi_J \wedge \varphi_K).$$

ad (3.) Indukcí: zřejmě pro $\underline{I} := \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$ je

$$\varphi_I = \varphi_{\underline{I}} \wedge \varphi_{i_k} = \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_{k-1}} \wedge \varphi_{i_k}.$$

ad (5.) Je-li $|I| = k$ a $|J| = \ell$, potom

$$\varphi_I \wedge \varphi_J = (-1)^{k\ell} \varphi_J \wedge \varphi_I.$$

Skutečně, je-li $I \cap J = \emptyset$, potom

$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell$

$$\varphi_I \wedge \varphi_J = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I\cup J \end{pmatrix} \varphi_{I\cup J} =$$

$$= \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I\cup J \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\cup J \\ J, I \end{pmatrix}} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, I \\ I\cup J \end{pmatrix} \varphi_{I\cup J} = \underset{\substack{\| \\ (-1)^{k\ell}}}{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix}} \varphi_J \wedge \varphi_I$$

Potom $\omega \wedge \tau = \left(\sum_{|I|=k} \omega_I \varphi_I\right) \wedge \left(\sum_{|J|=l} \tau_J \varphi_J\right)$ DIFJ

$$= \sum_{|I|=k} \sum_{|J|=l} \omega_I \tau_J \underbrace{\varphi_I \wedge \varphi_J}_{= (-1)^{kl} \varphi_J \wedge \varphi_I} = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega.$$

$\blacksquare$

x

Pozn: (i) Lze ukázat, že $\Lambda^*(V)$ nezávisí na volbě báze V.

(ii) $\Lambda^*(V)$ lze realizovat jako prostor antisymetrických tenzorů (tzn. antisymetr. multilineárních forem na V^*).

Věta: Nechť V je vektorový prostor s bází $e_1, \dots, e_n$. Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, kde $1 \le k \le n$.

Potom $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_i^j e_j$ a označme $W = (v_i^j)_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,k}}$

je matice $n \times k$ jejích souřadnic

(tzn. ve sloupcích W jsou souřadnice $v_1, \dots, v_k$)

$$W = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \dots & \underset{v_i}{\begin{matrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \vdots \\ v_i^n \end{matrix}} & \dots & v_k \end{array} \right)}_{k} \Bigg\} n$$

Je-li J k-prvková podmnožina $\{1, \dots, n\}$, označ

$$W_J := (v_i^j)_{\substack{j \in J\\ i=1,\dots,k}}$$

minor $k \times k$

Potom $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{|J|=k} (\det W_J)\, e_J$.

Plückerovy souřadnice

Spec. pro $k = n$ máme

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (\det W)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

DŮKAZ:

Máme $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_k=1}^{n} v_1^{j_1} \dots v_k^{j_k} \, \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k} =$

stačí sčítat pro $j_1, \dots, j_k$ po 2 různé

$$= \sum_{|J|=k} \sum_{\pi \in S_k} v_1^{j_{\pi(1)}} \dots v_k^{j_{\pi(k)}} \underbrace{\varphi_{j_{\pi(1)}} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{\pi(k)}}}_{= (\operatorname{sgn} \pi) \varphi_J}$$

$J : 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$

S_k … permutace $\{1, \dots, k\}$

$$= \sum_{|J|=k} (\det W_J) \, \varphi_J . \quad \blacksquare$$

Skalární součin na $\Lambda^*(V)$

Nechť V je vektor. prostor se skalárním součinem (poz. definitní, symetrický) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je ON-báze V.
(ortonormální)

Definujeme skalární součin na $\Lambda^*(V)$ jako

$$\left\langle \sum_I \alpha_I \varphi_I , \sum_J \beta_J \varphi_J \right\rangle := \sum_I \alpha_I \beta_I ,$$

spec. $\langle \varphi_I, \varphi_J \rangle = 1$ pro $I = J$,
$= 0$ pro $I \neq J$.

Normu definujeme $\|\omega\| := \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}$, $\omega \in \Lambda^*(V)$.