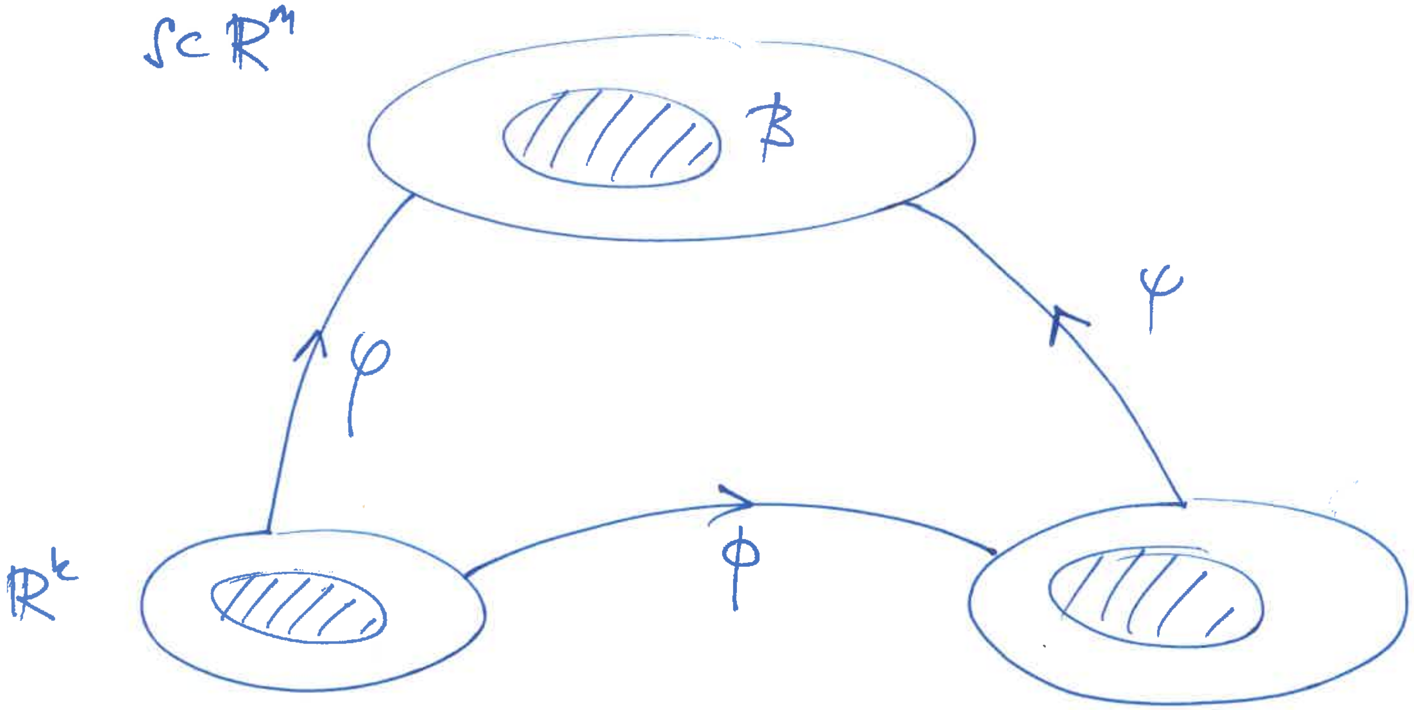


$$\lambda_S(B) \overset{\text{def}}{:=} \int_{\varphi^{-1}(B)} J\varphi \, d\lambda^k,$$ kde $J\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$ a $B \in \mathcal{B}(S)$.

<u>Pozn:</u> Je-li X metrický prostor, označme $\mathcal{B}(X)$ σ-algebru všech borelovských podmnožin v X, tzn. nejmenší σ-alg. množin X obsahující všechny otevřené množiny.

(T) Definice λ_S je korektní, tzn. nezávisí na volbě parametrizace.

Důkaz: Nechť $\varphi: U \xrightarrow{na} S$ a $\psi: V \xrightarrow{na} S$ jsou dvě mapy parametrizující plochu S. Víme, že přechodové zobrazení $\phi := \psi^{-1} \circ \varphi : U \xrightarrow{na} V$ je difeomorfismus. Potom $\varphi = \psi \circ \phi$,

$$D\varphi = D\psi \circ D\phi \quad \text{a} \quad (J\varphi)^2 = \det((D\varphi)^T D\varphi) =$$

$$= \det(\underbrace{(D\phi)^T}_{k \times k} \underbrace{(D\psi)^T D\psi}_{\substack{\text{matice} \\ k\times k}} \underbrace{D\phi}_{k \times k}) = (\det(D\phi))^2 \cdot (J\psi)^2.$$

Tedy pro každou borelovskou $B \subset S$ je

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} J\varphi(u)\, d\lambda^k(u) = \int_{\varphi^{-1}(B)} J\psi(\phi(u))\, \underbrace{|\det(D\phi(u))|}_{\substack{\text{jakobián} \\ v = \phi(u)}}\, d\lambda^k(u)$$

$$\overset{\substack{\text{věta} \\ \text{o substituci}}}{=} \int_{\psi^{-1}(B)} J\psi(v)\, d\lambda^k(v). \quad \blacksquare$$

VĚTA (existence a jednoznačnost míry na ploše; definice)

Na každé k-ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna Borelovská míra λ_S taková, že pro každou mapu φ plochy S je

$$\lambda_S\big|_{\langle\varphi\rangle} = \lambda_{\langle\varphi\rangle}$$

DŮKAZ: (i) Nechť $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je spočetný atlas S.
$i = 1,2,3,\dots$

Uvažujme rozklad $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots$, kde $S_1 := \langle\varphi_1\rangle$, $S_2 := \langle\varphi_2\rangle \setminus \langle\varphi_1\rangle$, $S_3 := \langle\varphi_3\rangle \setminus (\langle\varphi_1\rangle \cup \langle\varphi_2\rangle)$, atd. Položme

$$\lambda_S(B) := \sum_i \lambda_{\langle\varphi_i\rangle}(B \cap S_i)$$

pro každou borelovskou $B \subset S$.

(ii) Je-li φ mapa S a $B \subset \langle\varphi\rangle$ je borelovská, potom

$$\lambda_S(B) = \sum_i \lambda_{\underset{\langle\varphi_i\rangle \cap \langle\varphi\rangle}{\langle\varphi_i\rangle}}(B \cap S_i) \overset{T}{=} \sum_i \lambda_{\langle\varphi\rangle}(B \cap S_i) = \lambda_{\langle\varphi\rangle}(B).$$

(iii) Jednoznačnost: ~~Nechť $\{\varphi'_j \mid j = 1,2,3,\dots\}$ je jiný spočetný atlas S a $\{S'_j \mid j = 1,2,3,\dots\}$ je příslušný rozklad S.~~

Nechť μ je borelovská míra na S taková, že $\mu|_{\langle\varphi\rangle} = \lambda_{\langle\varphi\rangle}$ pro každou mapu φ plochy S. Potom pro každou borelov. $B\subset S$ platí

$$\mu(B) = \sum_i \mu(B\cap S_i) = \sum_i \lambda_{\langle\varphi_i\rangle}(B\cap S_i) = \lambda_S(B).$$ ∎

Pozn: Jsou-li $S'\subset S$ k-plochy v $\mathbb{R}^n$, potom $\lambda_{S'} = \lambda_S|_{S'}$. ∎

DEF (Plošný integrál 1. druhu)

Je-li $P\subset\mathbb{R}^n$ k-plocha a $f: P\to\mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_P f\,dS := \int_P f\,d\lambda_P,$$

má-li Lebesgueův integrál na pravé straně smysl. Zde λ_P je borelovská míra na P z předchozí věty.

Pozn: (i) dS je tradiční značení

(ii) Nechť $P\subset\mathbb{R}^n$ je jednoduchá plocha a $\varphi: U\subset\mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{na}} P$ je mapa. Potom $\lambda_P = \mu\varphi^{-1}$, kde $\mu(V) := \int_V J\varphi(u)\,d\lambda^k(u)$, $V\subset U$ borelovskou.

Proto

$$\int_P f\,dS = \int_U f\circ\varphi\,d\mu = \int_U f(\varphi(u))\,J\varphi(u)\,d\lambda^k(u).$$

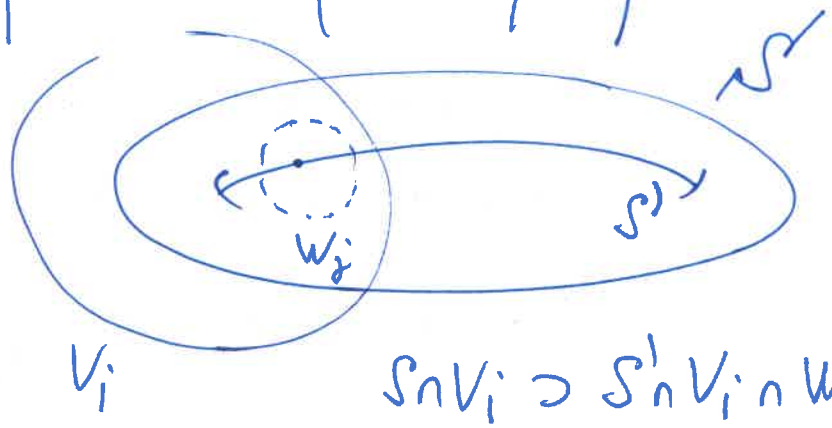
Speciálně pro $\boxed{k=1}$ je $J\varphi = \|\varphi'\|$ a

$$\int_S f\,dS = \int_\varphi f\,ds,$$ křivkový integrál 1. druhu z 61

je-li U interval.

VĚTA (Podplochy nižší dimenze mají míru nula)
Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, $S' \subset \mathbb{R}^n$ je l-plocha a $S' \subset S$. Je-li $l<k$, potom $\lambda_S(S') = 0$.

DŮKAZ: Víme, že každá plocha lze pokrýt spočetně mnoha jednoduchými plochami, protože má spočetnou bázi.
BÚNO: Lze předpokládat, že S, S' jsou jednoduché.



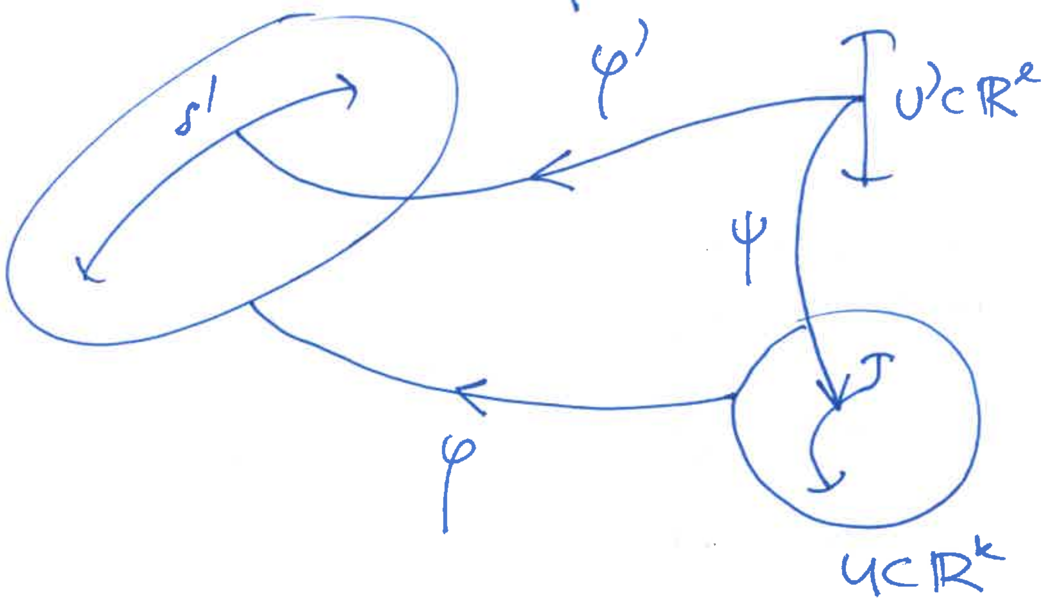
$$\underbrace{S\cap V_i}_{\text{jednod.}} \supset \underbrace{S'\cap V_i\cap W_j}_{\text{jednod.}}$$

Vezmeme tedy mapy $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{na}} S$ a $\varphi': U' \subset \mathbb{R}^l \xrightarrow{\text{na}} S'$. Z lemmatu o podmnožině je $\psi := \varphi^{-1}\circ\varphi' : U' \to \mathbb{R}^k$ l-mapa a $\psi(U') = \varphi^{-1}(S')$ je l-plocha v $\mathbb{R}^k$.

Ze cvičení víme, že $\lambda^k(\varphi^{-1}(S')) = 0$,

tudíž $\lambda_S(S') \overset{!}{=} \int_{\varphi^{-1}(S')} J\varphi \, d\lambda^k = 0$. ▨

G27



Zobecněné plochy

DEF: Neprázdná $S \subset \mathbb{R}^n$ je <u>zobecněná k-plocha</u>, jestliže existuje rozklad (disjunktní)

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q, \qquad (\times)$$

kde $p \geq 1$, $q \geq 0$, všechny S_j jsou <u>jednoduché</u> k-plochy a každá M_j je l_j-plocha s $0 \leq l_j < k$ a platí podmínka

$$S_j \cap \Big(\bigcup_{k \neq j} \overline{S_k} \cup \bigcup_{i=1}^{q} \overline{M_i} \Big) = \emptyset \qquad (*).$$

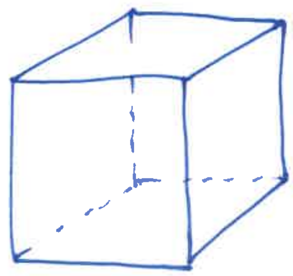
pro $j = 1, \dots, p$.

Pozn: (i) Pod <u>0-plochou</u> rozumíme množinu izolovaných bodů v $\mathbb{R}^n$. Dále <u>n-plocha</u> je libovolná otevřená $U \subset \mathbb{R}^n$ (s atlasem $\{Id_U\}$).

(ii) Jednoduché k-plochy S_i nazveme <u>komponentami</u> S a body $x \in S_i$ nazveme <u>regulárními body</u> S.

Př. $\partial [0,1]^n$ je zobecněná $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$

hranice jednotkové krychle



DEF. Pro zobecněnou k-plochu S jako v (*) definujeme míru λ_S jako

$$\lambda_S(B) := \lambda_{S_1}(B \cap S_1) + \dots + \lambda_{S_p}(B \cap S_p)$$

pro každou borelovskou $B \subset S$ a plošný integrál na S 1. druhu jako integrál podle λ_S.

(T) (korektnost definice λ_S) Definice míry λ_S na zobecněné k-ploše S nezávisí na jejím rozkladu (*).

DŮKAZ: Mějme dva takové rozklady S

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q = S_1' \cup \dots \cup S_{p'}' \cup M_1' \cup \dots \cup M_{q'}'.$$

Rozšíříme $\lambda_{S_i}(B) := \lambda_{S_i}(B \cap S_i)$ pro každou borelovskou $B \subset S$ a stejně i $\lambda_{S_j'}$. Zřejmě stačí ukázat, že

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_{S_j} = \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S_{j'}'}$$

Zřejmě každé $S_j \underset{(*)}{=} S \setminus \left(\bigcup_{k \neq j} \overline{S_k} \cup \bigcup_{i} \overline{M_i} \right)$ je (relativně) otevřená v S.

ot.
Proto $S_j \cap S'_{j'}$ je otevřená v $S'_{j'}$, tudíž je to k-plocha. Dále $S_j \cap M'_{i'}$ je otevřená v $M'_{i'}$, tudíž je to $l_{i'}$-plocha a $\lambda_{S_j}(M'_{i'}) = 0$.
Z toho je jasné, že

$$\lambda_{S_j} = \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S_j \cap S'_{j'}}.$$

Konečně máme

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S_j \cap S'_{j'}} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{S_j} = \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S'_{j'}}. \quad \blacksquare$$