LEMMA (o podmapách)

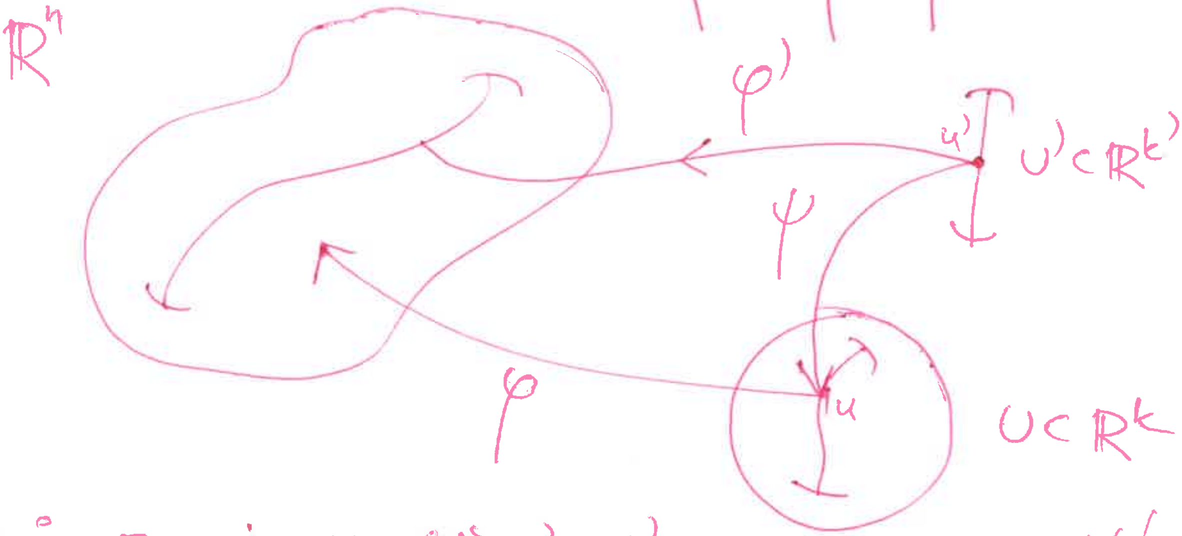
Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je mapa tř. C^m.

Nechť $\varphi' : U' \subset \mathbb{R}^{k'} \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení tř. $C^{m'}$,
otevř.

$1 \leq m' \leq m$ a $\langle \varphi' \rangle \subset \langle \varphi \rangle$. Potom

(i) $\psi := \varphi^{-1} \circ \varphi' : U' \to U \subset \mathbb{R}^k$ je tř. $C^{m'}$.

(ii) Je-li navíc φ' k'-mapa, potom je ψ k'-mapa v $\mathbb{R}^k$ a $\varphi' = \varphi \circ \psi$.



DŮKAZ: (i) Nechť $u' \in U'$ a $u := \psi(u')$. Víme, že ex. okolí $U_0 \subset U$ bodu u a k-prvkovou $I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že $\pi_I \circ \varphi|U_0$ je difeomorfismus tř. C^m. Potom na $U_0' := \psi^{-1}(U_0) \subset \mathbb{R}^{k'}$ platí, že
otevř.

$$\psi = (\pi_I \circ \varphi)^{-1} \circ \pi_I \circ \varphi' \text{ je tř. } C^{m'}.$$

(ii) Je-li navíc φ' mapa, je ψ zřejmě homeomorf.
Pro každé $u' \in U'$ je

$$D\varphi'(u') = D\varphi(u) \circ D\psi(u'), \text{ kde } u = \psi(u').$$

prosté - - - - - -> prosté

∎

Tečný prostor

<u>Připomenutí</u>: (<u>Parametr.</u>) <u>křivkou</u> (<u>tř. $\mathcal{C}^1$</u>) v $\mathbb{R}^n$ rozumíme $c: I \to \mathbb{R}^n$ tř. $\mathcal{C}^1$ definovanou na intervalu I. Pokud I není otevřený, potom je c restrikcí $\mathcal{C}^1$-zobrazení na nějakém otevřeném nadintervalu (viz G1).

<u>DEF.</u> <u>Tečným vektorem</u> k ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in S$ je vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že na ploše S existuje křivka $c: I \to S$ a bod $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů k S v $x \in S$ značíme $T_x S$ a nazýváme <u>tečným prostorem</u> k S v x.

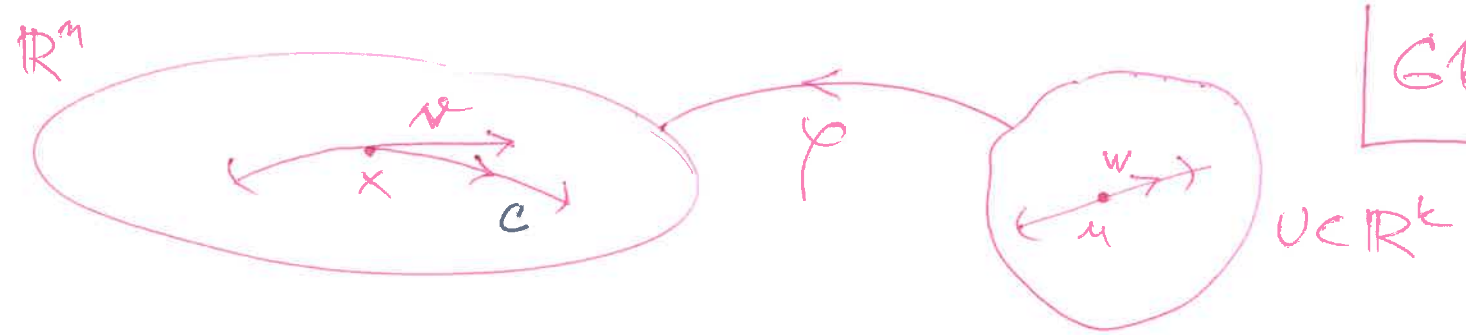
<u>VĚTA</u> (o tečném prostoru) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $x \in S$. Potom $T_x S$ je k-rozměrný vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$. Nechť $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je mapa S a $x = \varphi(u)$ pro nějaké $u \in U$.

Potom $$T_x S = \underbrace{LO}_{\text{lineární obal}}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)\right\} \quad (T)$$

$$= D\varphi(u)(\mathbb{R}^k)$$

a $D\varphi(u)$ je izomorfismus $\mathbb{R}^k$ na $T_x S$.

GH



<u>Důkaz</u>: Stačí dokázat (T), protože $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)$ jsou lineárně nezávislé.

$\boxed{\supset}$ Nechť $v \in LO\{\dots\}$. Potom

$$v = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)\, w_i$$

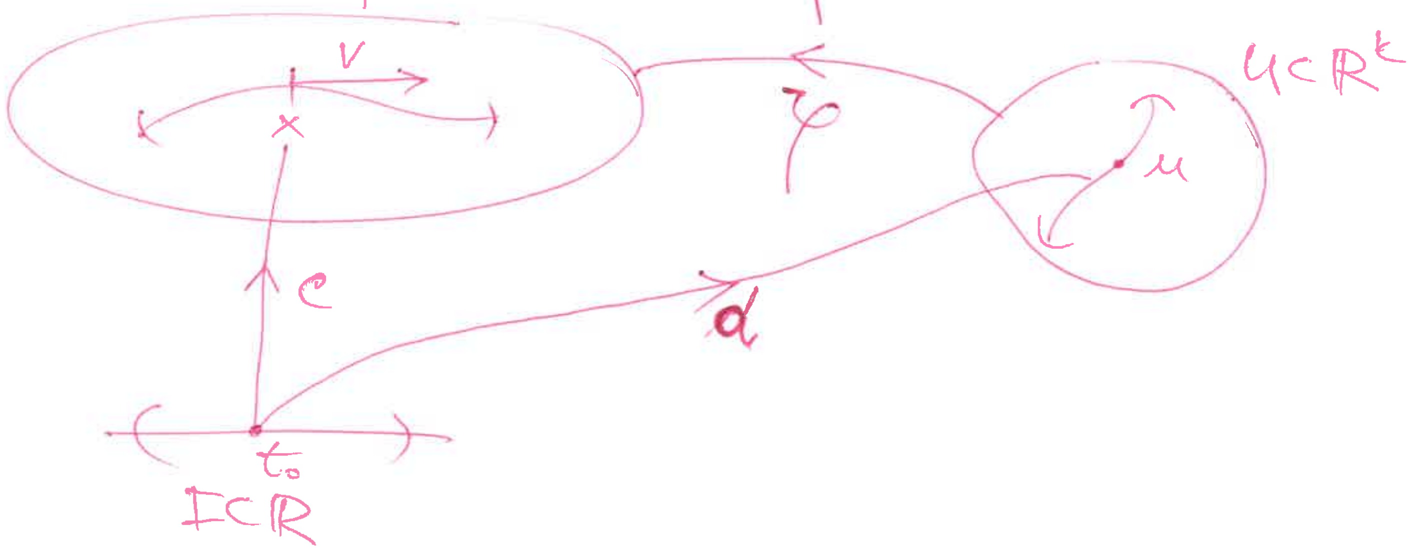
pro nějaký $w := (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{R}^k$. Potom

$$c(t) := \varphi(u + t \cdot w), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

kde $\delta > 0$ je dost malé, je křivka ve S, $c(0) = x$ a $c'(0) = D\varphi(u) \cdot w = v \in T_x S$.

$\boxed{\subset}$ Nechť $v \in T_x S$, tzn. ex. křivka $c : I \to S$ a $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.

<u>BÚNO</u>: Předp., že $\langle c \rangle \subset \langle \varphi \rangle$.



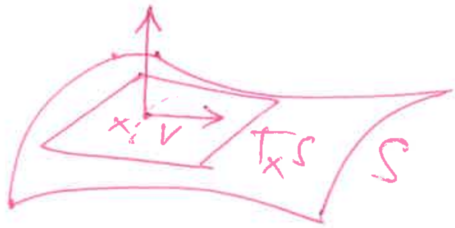
G19

∃ Lemmatu o podmnožině (viz $\boxed{G16}$) víme, že $d := \varphi^{-1} \circ c : I \to U \subset \mathbb{R}^k$ je křivka tř. $\mathcal{C}^1$. Potom $c = \varphi \circ d$ a

$$v = c'(t_0) = D\varphi(u)\big(d'(t_0)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_i} d_i'(t_0) \in \mathrm{Lo}\{\dots\}.$$

$\blacksquare$

Pozn: (i) Kreslíme afinní prostor $x + T_x S$



(ii) $T_x S^\perp$ nazýváme normálovým prostorem a jeho prvky normálovými vektory k ploše S v bodě x.

Zde $M^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in M\}$.

Míra na ploše

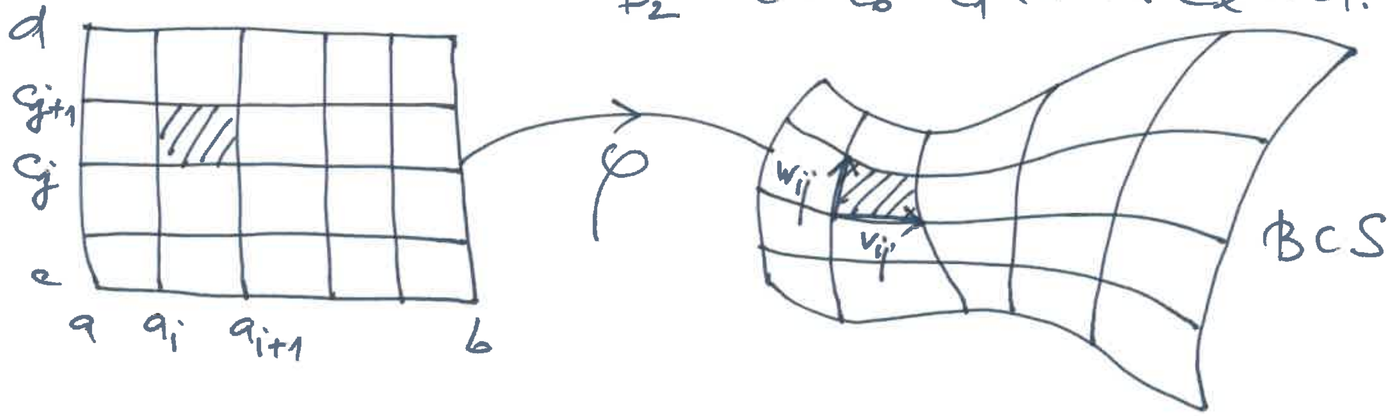
GRo

Délka křivky: Aproximace lomenou čarou.

Obsah plochy: Složitější! Např. aproximace válce $S \subset \mathbb{R}^3$ „plochami" složenými z trojúhelníků vždy nefunguje, viz [ČERNÝ & POKORNÝ, 17.2.5].

HEURISTIKA: Jak definovat míru λ_S na jednod. 2-ploše $S \subset \mathbb{R}^3$? Nechť $\varphi: \underset{\text{ot.}}{U} \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{na}} S$ je mapa a $B := \varphi(I)$, kde $I = [a,b] \times [c,d] \subset U$. Uvažme dělení $D_1: a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$,

$D_2: c = c_0 < c_1 < \dots < c_\ell = d$.



Potom $\lambda_S(B) = \sum_{i,j} \lambda_S(\varphi(I_{ij}))$, kde

$I_{ij} := [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Pro dost jemná D_1, D_2

je $\lambda_S(\varphi(I_{ij})) \doteq \underbrace{\|v_{ij} \times w_{ij}\|}_{\text{obsah rovnoběžníku se stranami}} \doteq J\varphi(a_i, c_j)\, \lambda^2(I_{ij})$,

kde

$v_{ij} := \varphi(a_{i+1}, c_j) - \varphi(a_i, c_j) \doteq \frac{\partial\varphi}{\partial u}(a_i, c_j)\,(a_{i+1} - a_i)$,

$w_{ij} := \varphi(a_i, c_{j+1}) - \varphi(a_i, c_j) \doteq \frac{\partial\varphi}{\partial v}(a_i, c_j)\,(c_{j+1} - c_j)$,

$J\varphi := \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|$.

Potom $\lambda_S(B) \doteq \sum_{i,j} J\varphi(a_i, c_j)\,(a_{i+1} - a_i) \cdot (c_{j+1} - c_j)$

Riemannovy sumy pro u, v $\quad |D_1| \to 0$, $|D_2| \to 0$

$$\int_a^b \left(\int_c^d J\varphi(u,v)\, dv \right) du$$

Ze cvičení víme, že $J\varphi(u) = \sqrt{\underbrace{\det(\underbrace{D\varphi(u)^T D\varphi(u)}_{\text{gramián}})}}$ (*).

<u>**DEF.**</u> Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá k-plocha a $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{na}} S$ je mapa. Potom na S definujeme <u>borelovskou míru</u> λ_S jako

$$\lambda_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} J\varphi(u)\, d\lambda^k(u)$$

pro každou borelovskou $B \subset S$. Zde $J\varphi$ je jako v (*), tzn. $J\varphi(u) := \sqrt{\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u))}$.

× Pozn: 1.) Nechť X je metrický prostor. Potom borelovská σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ je nejmenší σ-algebra množin X obsahující všechny otevřené množiny v X.

(i) Je-li $Y \subset X$, potom $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cap Y$, kde $\mathcal{B}(X) \cap Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}(X)\}$.

[σ-alg. na Y obsahující otevř. v Y, tudíž $\subset$ platí;

$\supset$: Protože vložení $i: Y \to X$ je spojité, $i^{-1}(A) = A \cap Y \in \mathcal{B}(Y)$ $\forall A \in \mathcal{B}(X)$]

(ii) Je-li $Y \in \mathcal{B}(X)$, potom

$$\mathcal{B}(Y) = \{A \in \mathcal{B}(X) \mid A \subset Y\}.$$

[σ-alg. na Y obs. otevř. v Y
$\Rightarrow \subset$;
$\supset$: z (i)]

2.) Je-li $\boxed{k = n}$, potom $J\varphi(u) = |\det(D\varphi(u))|$.

jakobián