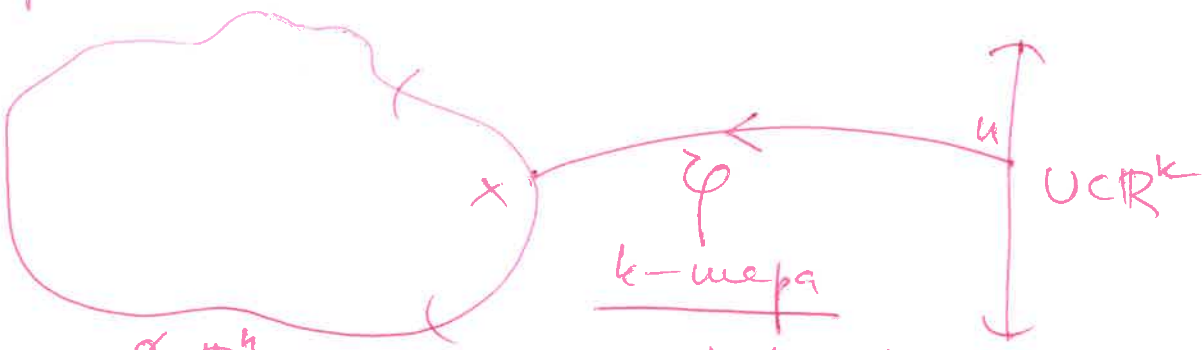
Připomenutí:



$S \subset \mathbb{R}^n$ **k-plocha**

k-mapa

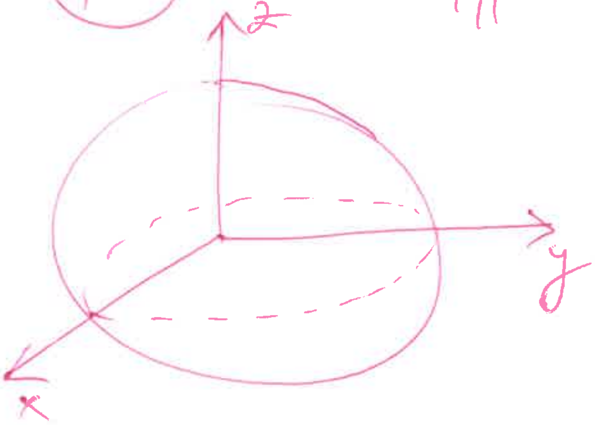
- φ je tř. C^∞
- $\operatorname{rank} D\varphi = k$
- φ je homeom.

$\Big\}$ **param. k-plocha**

Pozn: Nechť S je k-plocha v $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset \neq S'$ je (relativně) otevřená podmnožina S, tzn. $S' = S \cap V$ pro nějakou otevřenou $V \subset \mathbb{R}^n$. Potom je zřejmé $S' \subset \mathbb{R}^n$ taky k-~~mapa~~ plocha.

Plocha je lokálně grafem funkce

Př. 1: $S^2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

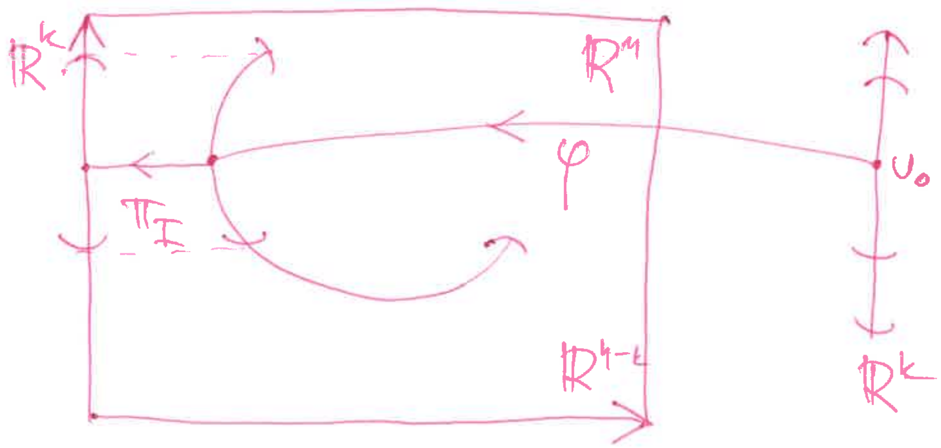


Potom horní/dolní polosféra je grafem $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y)\in B(0,1) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$

Podobně $x=\dots$, $y=\dots$

Značení: Nechť $I=\{i_1,\dots,i_k\}$, $1\le i_1<\dots<i_k\le n$. Pro $x\in\mathbb{R}^n$ píšeme $x_I := (x_{i_1},\dots,x_{i_k})$ a označme $\pi_I:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ projekci $\pi_I(x):=x_I$. Ztotožňujeme $x\in\mathbb{R}^n$ s $(x_I,x_{I^c})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$, kde $I^c:=\{1,\dots,n\}\setminus I$.

LEMMA: Nechť $\varphi: U\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ je mapa tř. C^m $(m\ge 1)$. Potom pro každé $u_0\in U$ existuje jeho okolí $U_0\subset U$ a k prvková $I\subset\{1,\dots,n\}$ tak, že $\pi_I\circ\varphi|_{U_0}$ je difeomorfismus tř. C^m.



<u>Důkaz</u>: Protože rank $D\varphi(u_0) = k$, existuje k-prvková $I \subset \{1, \dots, n\}$ taková, že

$$D(\pi_I \circ \varphi)(u_0) = \left(\frac{\partial \varphi_i(u_0)}{\partial u_j}\right)_{\substack{i \in I \\ j = 1, \dots, k}}$$

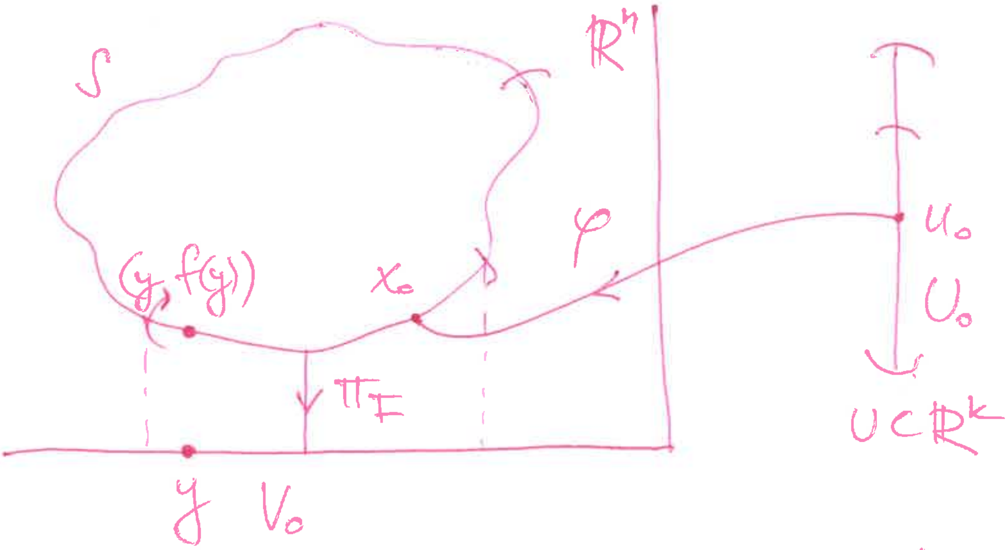
je regulární. Zbytek z věty o inverzním zobrazení. ▨

<u>DEF</u>: Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-<u>grafem funkce</u> tř. C^m, pokud existuje otevřená $U \subset \mathbb{R}^k$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^m a k-prvková $I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že $S = \text{graf}_I f$, kde $\text{graf}_I f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_I \in U, x_{I^c} = f(x_I)\}$.

<u>Pozn</u>: Víme, že graf funkce je jednoduchá plocha (pro $I = \{1, \dots, k\}$, obecně stejně).

<u>VĚTA</u>: Množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, právě když každé $x \in S$ má okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ takové, že $S \cap V$ je k-grafem funkce.

<u>Důkaz</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ Jasné, $\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $x_0 \in S$, $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je mapa S a $x_0 = \varphi(u_0)$ pro $u_0 \in U$.



Z Lemmatu existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u_0 a k-prvková $I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že

$\Phi := \pi_I \circ \varphi|_{U_0}$ je difeomorfismus, spec.

$V_0 := \Phi(U_0)$ je otevřená v $\mathbb{R}^k$.

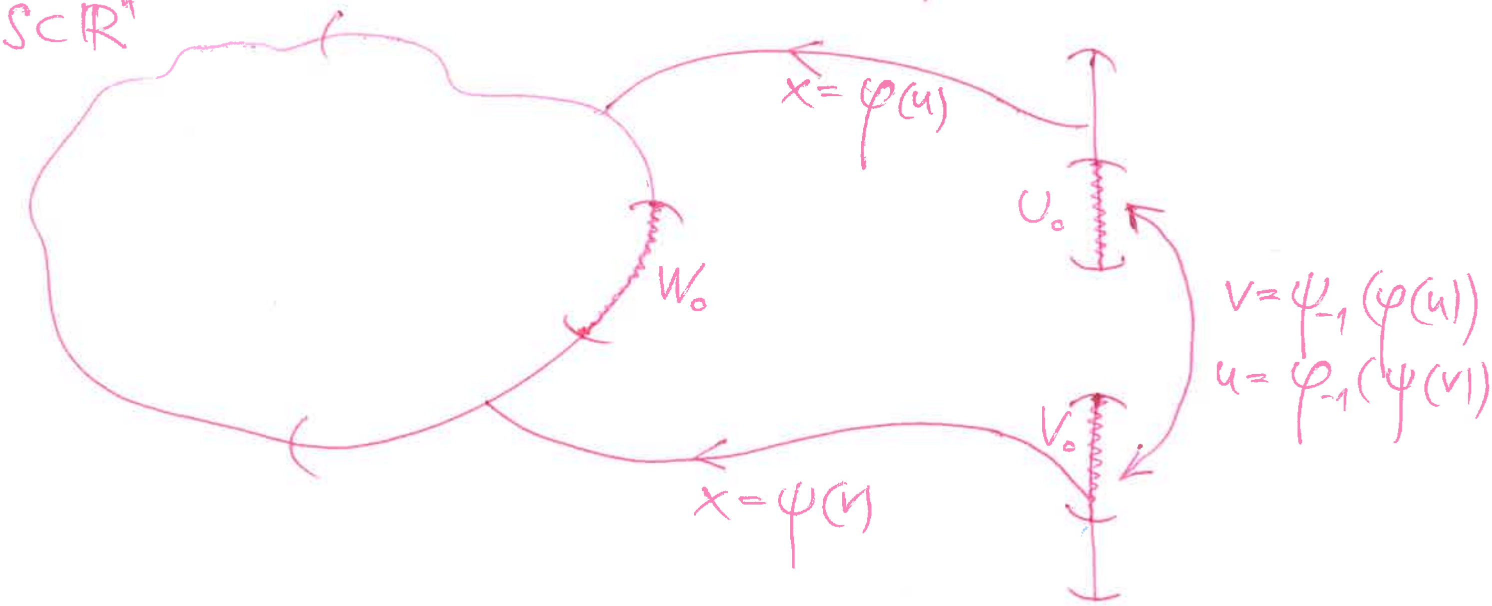
Pro každé $y \in V_0$ definujme

$$f(y) := (\pi_{I^c} \circ \varphi \circ \Phi^{-1})(y)$$

Potom zřejmě $\operatorname{graf}_I f = \langle \varphi|_{U_0} \rangle$. ■

Přechodové zobrazení mezi mapami

$S \subset \mathbb{R}^n$



Nechť φ a ψ jsou dvě k-mapy plochy S v $\mathbb{R}^n$ a $W_0 := \langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle \neq \emptyset$. Potom W_0 je (relativně) otevřená v S, $U_0 := \varphi_{-1}(W_0)$ a $V_0 := \psi_{-1}(W_0)$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^k$. Přechodovým zobrazením mezi φ a ψ se rozumí homeomorfismy $\Phi : U_0 \xrightarrow{na} V_0$ a $\Phi^{-1} : V_0 \xrightarrow{na} U_0$, kde

$$\Phi := \psi_{-1} \circ \varphi \quad a \quad \Phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi.$$

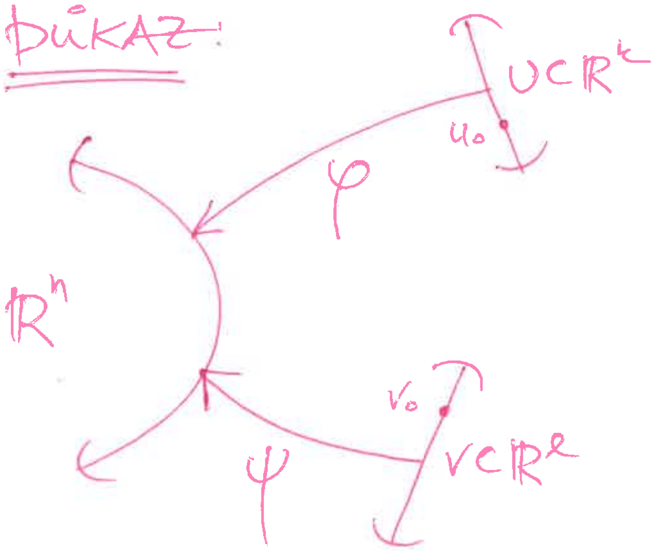
Pozn: (i) Mapa φ se často nazývá jako lokální souřadnicový systém na S a přechodová zobrazení tedy popisují změnu lokálních souřadnic.

(ii) Ukážeme, že Φ i Φ^{-1} jsou dokonce difeomorfismy (Jr. dm).

VĚTA (o jednoznačnosti dimenze pro jednoduchou plochu)

Nechť φ je k-mapa a ψ je l-mapa v $\mathbb{R}^n$ (tř. C^m). Je-li $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, potom $k = l$ a $\Phi := \psi^{-1} \circ \varphi$ je difeomorfismus (tř. C^m).

DŮKAZ:



Zřejmě $U := \varphi^{-1}(\langle\varphi\rangle) \subset \mathbb{R}^k$, $V := \psi^{-1}(\langle\varphi\rangle) \subset \mathbb{R}^l$ jsou otevřené a $\Phi : U \xrightarrow{na} V$ je homeomorfismus. (Z Brouwerovy věty plyne $k = l$.)

Ukážeme, že Φ je dokonce difeomorfismus, tj. Φ i Φ^{-1} jsou tř. C^m. Z toho již plyne, že $k = l$ (snadné cv.).

Ukažme nejprve, že Φ je tř. C^m.

Nechť $u_0 \in U$ a $\varphi(u_0) = \psi(v_0)$ pro $v_0 \in V$.

Z Lemmatu na $\boxed{G10}$ ex. okolí $V_0 \subset V$ bodu v_0 a l-prvková $I \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že $\pi_I \circ \psi|_{V_0}$ je difeomorfismus tř. C^m.

Potom $U_0 := \varphi^{-1}(\psi(V_0))$ je okolí u_0 a na U_0 je $\Phi = (\pi_I \circ \psi)^{-1} \circ \pi_I \circ \varphi$, což je tř. C^m.

▨

DŮSLEDEK: Každá plocha S v $\mathbb{R}^n$ (tř. C^m) má jednoznačně určenou dimenzi a všechna přechodová zobrazení mezi mapami S jsou difeomorfismy (tř. C^m).

Je-li S k-plocha v $\mathbb{R}^n$, definujeme samozřejmě $\dim S := k$.