Geodetiky

- jsou (rovnoměrné přímočaré) pohyby na ploše

DEF: Nechť $c : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ je regulární křivka na ploše S. Potom c je *geodetika*, pokud

$$c''(t) \in \left(T_{c(t)} S\right)^{\perp} \quad \forall t \in I$$

Pozn: každá geodetika c na ploše S má konstantní rychlost, tzn. $\exists\, r > 0$ takové, že $\|c'\| = r$ na I.

Skutečně, $\frac{d}{dt}\|c'\|^2 = \frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 2\langle \underset{\in T_cS}{c'}, c''\rangle = 0.$ (o)

Př viz GE03

VĚTA (rovnice pro geodetiky) Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je mapa S a $c : I \to \langle\varphi\rangle$ je regulární křivka, tzn. $c = \varphi \circ u$, kde $u : I \to U$ je regulární křivka. Potom c je geodetika na S, právě když $u = (u_1, u_2)$ řeší (EG):

$$\frac{d}{dt}\left(g^{11} u_1' + g^{12} u_2'\right) = \frac{1}{2}\left(g^{11}_{u_1} (u_1')^2 + 2 g^{12}_{u_1} \cdot u_1' \cdot u_2' + g^{22}_{u_1} (u_2')^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(g^{12} u_1' + g^{22} u_2'\right) = \frac{1}{2}\left(g^{11}_{u_2} (u_1')^2 + 2 g^{12}_{u_2} \cdot u_1' \cdot u_2' + g^{22}_{u_2} \cdot (u_2')^2\right)$$

Zde $g = (g^{ij})$ je matice 1. fundamentální formy S a $g^{ij}_{u_k} := \frac{\partial}{\partial u_k} g^{ij}$.

GE02

Důkaz: Známe: c je geodetika, právě když $\langle c'', \varphi_{u_i}\rangle = 0$ pro $i = 1, 2$.

Máme

$$\frac{d}{dt}\langle c', \varphi_{u_i}\rangle = \overset{\overset{0}{\parallel}}{\langle c'', \varphi_{u_i}\rangle} + \langle c', \frac{d}{dt}\varphi_{u_i}\rangle \qquad (\times)$$

Protože $c' = \varphi_{u_1}\cdot u_1' + \varphi_{u_2}\cdot u_2'$, z $(\times)$ dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(g^{1i} u_1' + g^{2i} u_2'\right) = \langle c', \varphi_{u_i u_1}\cdot u_1' + \varphi_{u_i u_2}\cdot u_2'\rangle =$$

$$= \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_i u_1}\rangle (u_1')^2 + \langle \varphi_{u_2}, \varphi_{u_i u_2}\rangle (u_2')^2 +$$

$$+ u_1'\cdot u_2'\left(\langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_i u_2}\rangle + \langle \varphi_{u_2}, \varphi_{u_i u_1}\rangle\right) \qquad (*)$$

Dále $g^{jj}_{u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\langle \varphi_{u_j}, \varphi_{u_j}\rangle = 2\langle \varphi_{u_i u_j}, \varphi_{u_j}\rangle$ a

$$g^{12}_{u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\rangle = \langle \varphi_{u_i u_1}, \varphi_{u_2}\rangle + \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_i u_2}\rangle.$$

Proto $(*)$ je ekvivalentní s (EG). ∎