GAUS

VĚTA (Meusnier) Nechť $S \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná spojitým normálovým polem $N: S \to S^2$. Nechť $c: I \to S$ je hladká křivka na ploše S parametrizovaná obloukem. Potom pro každé $t \in I$

$$\mathrm{II}_{c(t)}(c'(t))^{*)} = \varkappa(t)\langle N(c(t)), n(t)\rangle, \quad \text{je-li } \varkappa(t) \neq 0;$$
$$= 0, \quad \text{je-li } \varkappa(t) = 0.$$

Zde $n(t) := c''(t)/\|c''(t)\|$ je jednotk. normálový vektor k c v t a $\varkappa(t) = \|c''(t)\|$.
Speciálně, je-li $\theta(t) \in [0, \pi/2]$ úhel mezi normálou $N(c(t))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě t, potom

$$|\mathrm{II}_{c(t)}(c'(t))| = \varkappa(t)\cdot\cos(\theta(t)), \quad t \in I.$$

DŮKAZ: Z (2) je $\mathrm{II}_{c(t)}(c'(t)) = \langle N(c(t)), c''(t)\rangle$ a $c''(t) = \varkappa(t)\cdot n(t)$. ▨

*) $= \varkappa_n(c'(t))$

GAUSS

DEF. Nechť $S \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná plocha, $x \in S$ a $0 \neq v \in T_x S$. Pak číslo

$$\varkappa_n(v) := \frac{\mathrm{II}_x(v)}{\mathrm{I}_x(v)}$$

nazýváme normálovou křivostí S v bodě x a ve směru v.

Pozn. (i) Z Meusnierovy věty plyne, že $|\varkappa_n(v)|$ je křivost křivky, řezu plochy S rovinou $x + \mathrm{Lo}\{v, N(x)\}$ v bodě x.

(ii) Zřejmě $\varkappa_n(v) = \varkappa_n(\alpha v)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Stačí proto studovat $\varkappa_n$ na $T_x^1 S := \{v \in T_x S \mid \|v\| = 1\}$. Protože $\varkappa_n$ je spojitá funkce na kompaktu $T_x^1 S$, $\varkappa_n$ nabývá (na $T_x^1 S$) minima i maxima.

DEF. (i) Nechť $0 \neq v \in T_x S$. Pokud $\varkappa_n$ nabývá ve směru v svého extrému, pak nazýváme v hlavním směrem plochy S v x a $\varkappa_n(v)$ hlavní křivostí S v x.

(ii) Jsou-li $\varkappa_1, \varkappa_2$ minimum a maximum $\varkappa_n$ na $T_x^1 S$, potom definujeme Gaussovu křivost $K(x) := \varkappa_1 \cdot \varkappa_2$ a střední křivost $H(x) := \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}$ orientované 2-plochy $S \subset \mathbb{R}^3$ v bodě x.

6AU 9.2

(iii) Bod $x \in S$ se nazývá

- <u>eliptický</u>, je-li $K(x) > 0$; je-li navíc $x_1 = x_2$, potom <u>kruhový</u>;
- <u>parabolický</u>, je-li $K(x) = 0$; je-li navíc $x_1 = x_2 = 0$, potom <u>planární</u>;
- <u>hyperbolický</u>, je-li $K(x) < 0$

Pozn: Je-li $x \in S$, potom

$$K^-(x) = K(x) \quad \text{a} \quad H^-(x) = -H(x),$$

pokud $K^-(x)$ a $H^-(x)$ značí Gaussovu a střední křivost v $x \in S$ pro <u>opačně</u> orientovanou plochu S.

Hledání hlavních směrů a křivostí S

GAU1

Nechť $x\in S$. Hledáme extrémy $\varkappa_n$ na $T^1_x S$.
Nechť $\varphi : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ je mapa S a $x=\varphi(u)$.
Nechť $v\in T^1_x S$ a $v = D\varphi(u)a$, $a\in\mathbb{R}^2$.
Z (∘) a (†) je $1 = I_x(v) = a^T g(u) a =: G(a)$ a
$\varkappa_n(v) = a^T h(u) a =: H(a)$.
Ekvivalentně, hledáme extrémy H na

(E) $$M := \{a\in\mathbb{R}^2 \mid G(a) = 1\}.$$

Užijeme Lagrangeovu větu o vázaných extrémech funkce, $G(a) = a_1^2 g^{11}(u) + 2a_1a_2 g^{12}(u) + a_2^2 g^{22}(u)$
a $\nabla G(a) = 2\underbrace{g(u)a\neq 0}_{\text{regulární}}$, $\nabla H(a) = 2h(u)a$.

Nabývá-li H v $a\in M$ extrém, potom ex. $\lambda\in\mathbb{R}$ takové, že $\nabla H(a) = \lambda\nabla G(a)$, neboli

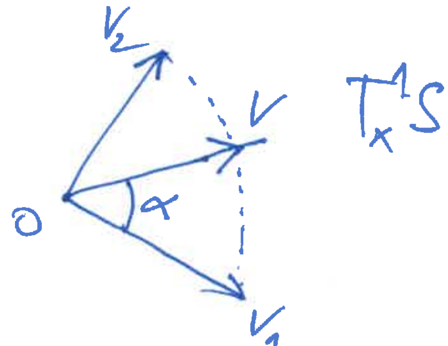
(E1) $$\big(h(u) - \lambda g(u)\big)a = 0,$$
$$W(u)a = \lambda a,$$

kde $W(u) := g(u)^{-1}\cdot h(u)$ je tzv. Weingartenova matice a a je její vlastní vektor s vlastním číslem λ. Dále $H(a) = a^T h(u) a \overset{(E1)}{=} \lambda \underbrace{a^T g(u) a}_{=1}$
$= \lambda$ je hlavní křivost S.

Platí-li (E1), potom zřejmě

(E2) $$\det\big(h(u) - \lambda\, g(u)\big) = 0,$$
$$\det\big(W(u) - \lambda \underbrace{I}_{\text{jednotk. matice } 2\times 2}\big) = 0.$$

VĚTA (Eulerův vzorec) Nechť $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ je po řadě minimum a maximum $\varkappa_n$ na $T^1_x S$. Potom existují hlavní směry $v_1, v_2 \in T^1_x S$ takové, že $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\varkappa_n(v_j) = \varkappa_j$ pro $j = 1,2$ a
$$\varkappa_n(v) = \varkappa_1 \cdot \cos^2\alpha + \varkappa_2 \cdot \sin^2\alpha,$$
je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $v = v_1 \cdot \cos\alpha + v_2 \cdot \sin\alpha \in T^1_x S$.



Důkaz: (1) Nechť $\varkappa_1 < \varkappa_2$ a pro $j = 1,2$ je $v_j = D\varphi(u)\, a^j$ *). Potom z (E1) je
$$h(u)\, a^j = \varkappa_j\, g(u)\, a^j \quad \text{a}$$
$$(a^j)^T h(u) = \varkappa_j\, (a^j)^T g(u).$$
symetrické

Zřejmě $$\mathrm{II}_x(v_1, v_2) = (a^1)^T h(u)\, a^2 = \underbrace{(a^1)^T g(u)\, a^2}_{= \mathrm{I}_x(v_1,v_2)} \cdot \varkappa_2 = (a^1)^T \cdot g(u) \cdot a^2 \cdot \varkappa_1,$$
tudíž $\mathrm{I}_x(v_1, v_2) = 0 = \mathrm{II}_x(v_1, v_2)$.

*) kde $x = \varphi(u)$, $u \in U$ jsou lokál. souřadnice.

Konečně $\varkappa_1(v) = \mathrm{II}_x(v,v) \overset{\text{bilineární}}{=} \underbrace{\mathrm{II}_x(v_1,v_1)}_{\varkappa_1}\cdot\cos^2\alpha$ **GAU12**

$+ \underbrace{\mathrm{II}_x(v_2,v_2)}_{\varkappa_2}\cdot\sin^2\alpha$,

je-li $v = v_1\cdot\cos\alpha + v_2\cdot\sin\alpha \in T_x^1 S$. $\square$

(2) Je-li $\varkappa_1 = \varkappa_2 =: \varkappa$, potom $\underbrace{\varkappa_1 \equiv \varkappa}_{h(u) = \varkappa g(u)}$, a každý $v \in T_x^1 S$ je hlavní směr S. ▨

<u>VĚTA</u> (Gaussova a střední křivost)

Nechť φ je kladně orientovaná mapa plochy S a h, g jsou příslušné matice II, I, viz (0) a (4). Potom

$$K = \frac{\det h}{\det g},$$

$$H = \frac{h^{11}g^{22} - 2h^{12}g^{12} + h^{22}g^{11}}{2\det g} \quad \text{a}$$

$$\varkappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K},$$

kde $\varkappa_{1,2}$ jsou hlavní křivosti na ploše S.

<u>DŮKAZ</u>: $\varkappa_{1,2}$ jsou kořeny kvadratické rovnice (E2) v proměnné λ. Dále $0 = \det(h - \lambda g) =$

$$\det\begin{pmatrix} h^{11} - g^{11}\cdot\lambda & h^{12} - g^{12}\cdot\lambda \\ h^{12} - g^{12}\lambda & h^{22} - g^{22}\cdot\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2\cdot\underbrace{\left(g^{11}\cdot g^{22} - (g^{12})^2\right)}_{\det(g)} + \lambda\cdot\left(-h^{11}g^{22} - g^{11}h^{22} + 2h^{12}g^{12}\right) + \det h$$

GAU13

Pro kořeny $x_{1,2}$ rovnice $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ platí $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. ▨

DEF. Nechť $c: I\to S\subset\mathbb{R}^3$ je regulární křivka na orientované ploše S. Potom křivka c je

(i) hlavní na S, pokud $c'(t)$ je hlavním směrem S pro každé $t\in I$;

(ii) asymptotická na S, je-li

$$\kappa_n(c'(t))=0 \quad \forall t\in I.$$

VĚTA: Nechť $\varphi: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ je mapa orientované plochy S a $c: I\to\langle\varphi\rangle$ je regulární křivka, tzn. $c=\varphi\circ u$, kde $u: I\to U$ je regulární křivka. Potom (i) c je hlavní na S, právě když $u=(u_1,u_2)$ řeší diferenciální rovnici

$$(\mathrm{HL})\quad \det\begin{pmatrix}(u_2')^2 & -u_1'u_2' & (u_1')^2\\ g_{11} & g_{12} & g_{22}\\ h_{11} & h_{12} & h_{22}\end{pmatrix}=0$$

LÉPE PSÁT: g^{ij} místo g_{ij}

(ii) c je asymptotická na S, právě když u řeší diferenc. rovnici

$$(\mathrm{As})\quad h^{11}(u_1')^2+2h^{12}u_1'u_2'+h^{22}(u_2')^2=0.$$

DŮKAZ: (ii) z definice.

(i) Z (E1) $c'(t)$ je hlavní směr S, právě když ha, ga jsou lineárně závislé, kde $a = u'(t)$, $h = h(u(t))$ a $g = g(u(t))$. Neboli

$$0 = \det(ga \mid ha) = \det\begin{pmatrix} g^{11}u_1' + g^{12}u_2', & h^{11}u_1' + h^{12}u_2' \\ g^{12}u_1' + g^{22}u_2', & h^{12}u_1' + h^{22}u_2' \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní s (H1). $\blacksquare$