Geometrie 2

(ZS 2024/25)

- INFO: SIS, WEBOVÁ STRÁNKA — přípravy
- ZÁPOČET: za domácí úkoly
- ZKOUŠKA: písemná
- OBSAH:

  1. Plochy v $\mathbb{R}^n$: tečný prostor, plošný integrál 1. druhu pomocí mapy
  2. Diferenciální formy a Stokesova věta v $\mathbb{R}^n$, plošný integrál 2. druhu
  3. Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$: křivost, geodetiky

- LITERATURA

Značení:

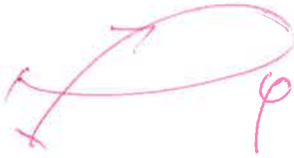
(i) Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená. Potom pro totálně diferencovatelné zobrazení $f: U \to \mathbb{R}^n$ v bodě $u \in U$ budeme používat značení $Df(u): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Často lineární zobrazení $Df(u)$ ztotožníme s jeho (tzv. Jacobiho) maticí, tzn.

$$Df(u) = \left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$$

matice $n \times k$

(ii) Okolím bodu x v metrickém prostoru X budeme rozumět libovolnou otevřenou $U \subset X$ obsahující x.

$\boxed{\text{Plochy v } \mathbb{R}^n}$



V Geometrii 1 jsme studovali regulární parametrizované křivky $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n=3)$, tzn. $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$ a $\varphi' \neq 0$ na (a,b).

DEF. (i) Parametrizovanou k-plochou v $\mathbb{R}^n$ (tř. $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$) rozumíme zobrazení $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^m$ na otevřené $U \subset \mathbb{R}^k$ takové, že $\underset{\text{hodnost}}{\text{rank}}\, D\varphi(u) = k$, $u \in U$.

Úmluva: Neuvedeme-li třídu hladkosti $\mathcal{C}^m$, myslíme $\mathcal{C}^\infty$.

(ii) Parametrizovanou k-plochu $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ nazveme k-mapou, jestliže φ je homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

Pozn: Obraz $\langle \varphi \rangle := \varphi(U)$ chápeme jako metrický podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$.

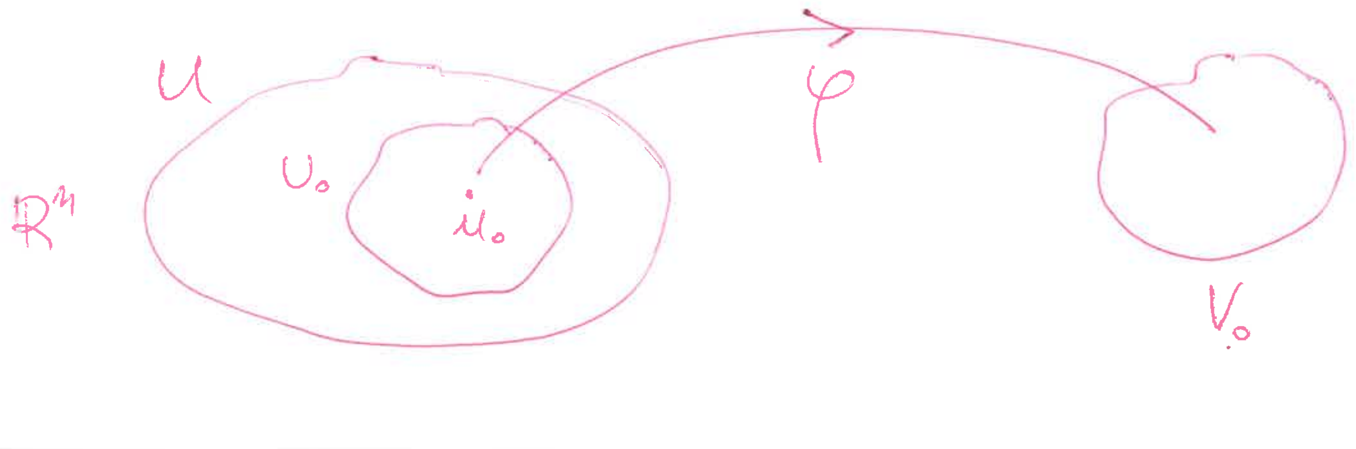
Př. 1.) v $\mathbb{R}^n$: regulární parametriz. křivky

= parametriz. 1-plochy

2.) Nechť φ je parametr. k-plocha v $\mathbb{R}^n$. Potom nutně $k \leq n$. Je-li $k = n$, pak $\langle\varphi\rangle$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, jak plyne z věty o inverzním zobrazení (viz MA):

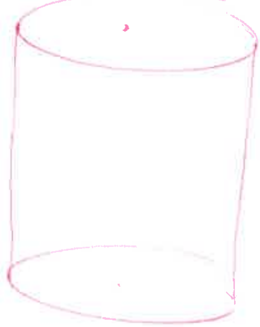
VĚTA: Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$, a matice $D\varphi(u_0)$ je regulární v $u_0 \in U$. Potom ex. okolí $U_0 \subset U$ bodu u_0 takové, že $V_0 := \varphi(U_0)$ je otevřená a $\varphi|_{U_0}: U_0 \to V_0$ je difeomorfismus třídy $\mathcal{C}^m$ (tzn. $\varphi|_{U_0}$ je bijekce, $\varphi|_{U_0}$ a $(\varphi|_{U_0})^{-1}$ jsou třídy $\mathcal{C}^m$).

Úmluva: V dalším $\boxed{k < n}$.



3.] Uvažme válcovou plochu

$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$.



Potom $\varphi(u,v) := (\cos v, \sin v, u)$

na $\mathbb{R}^2$ je parametrizovaná 2-plocha,

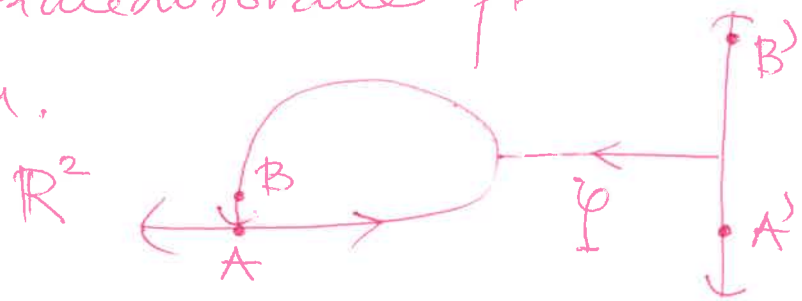
ale není to mapa (protože není prostá). Ale S je „pokryto" mapami

$\varphi|_{\mathbb{R}\times(-\pi,\pi)}$ a $\varphi|_{\mathbb{R}\times(0,2\pi)}$.

$\forall$ 3.5]

4.] Ani prosté parametrizované plochy nemusí být mapou.

× Ale parametrizované plochy jsou lokálně mapou!

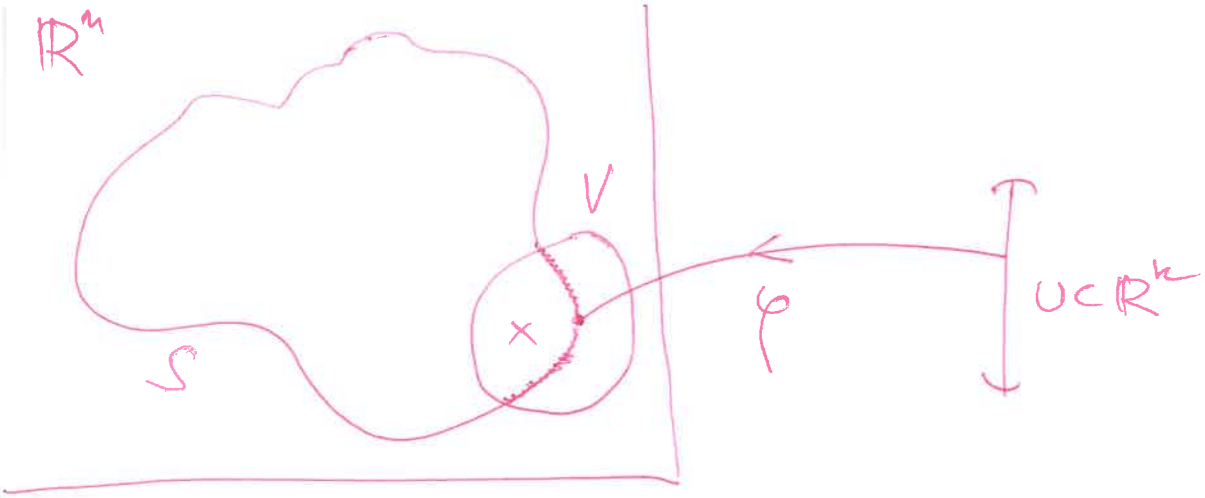


DEF. Neprázdnou $S \subset \mathbb{R}^n$ nazveme <u>k-plochou</u> (třídy C^m), jestliže ke každému $x \in S$ existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí x a k-mapa $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ (tř. C^m) taková, že $\varphi(U) = V \cap S$. Každou takovou mapu φ nazveme mapou plochy S. Speciálně obraz $\langle\varphi\rangle := \varphi(U)$ jediné k-mapy φ nazveme <u>jednoduchou k-plochou</u>.

3.5] Neexistuje 2-mapa φ taková, že

$\langle\varphi\rangle = S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Proč?

kompakt



DEF. Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, pak libovolný soubor $\mathcal{A}$ map plochy S takový, že

$$S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \langle \varphi \rangle ,$$

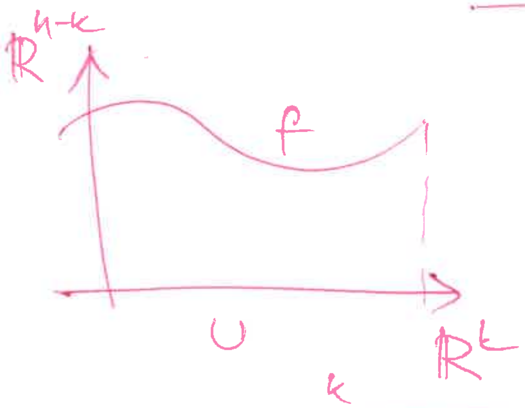
nazveme *atlasem* plochy S.

Pozn: každá plocha v $\mathbb{R}^n$ má nejvýše spočetný atlas. To plyne z toho, že $\mathbb{R}^n$ a libovolný jeho podprostor je *Lindelöfův* (tzn. každé jeho otevřené pokrytí má nejvýše spočetné podpokrytí). Skutečně, $\mathbb{R}^n$ má *spočetnou* bázi (otevřených množin), např.

$$\beta := \{ \underbrace{B(x,r)}_{\text{ot. koule v } \mathbb{R}^n} \mid x \in \mathbb{Q}^n, r > 0, r \in \mathbb{Q} \}.$$

Př. Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$. Potom jeho graf $\operatorname{graf}(f) := \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$ je jednoduchá **k**-plocha v $\mathbb{R}^n$ (tř. $\mathcal{C}^m$).

x



Skutečně, $\varphi(u) := (u, f(u))$, $u \in U$, je prosté, třídy $\mathcal{C}^m$ a $\operatorname{rank}(D\varphi) = k$.
Navíc φ^{-1} je restrikce projekce z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^k$, tudíž φ^{-1} je spojité a φ je mapa.

$$D\varphi = \begin{array}{c} k \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & & \\ & & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} k \\ \\ \\ \end{array}$$

Připomenutí: Věta o implicitních funkcích

Pro $x \in \mathbb{R}^n$ píšeme $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, pokud $y = (x_1, \dots, x_k)$ a $z = (x_{k+1}, \dots, x_n)$.

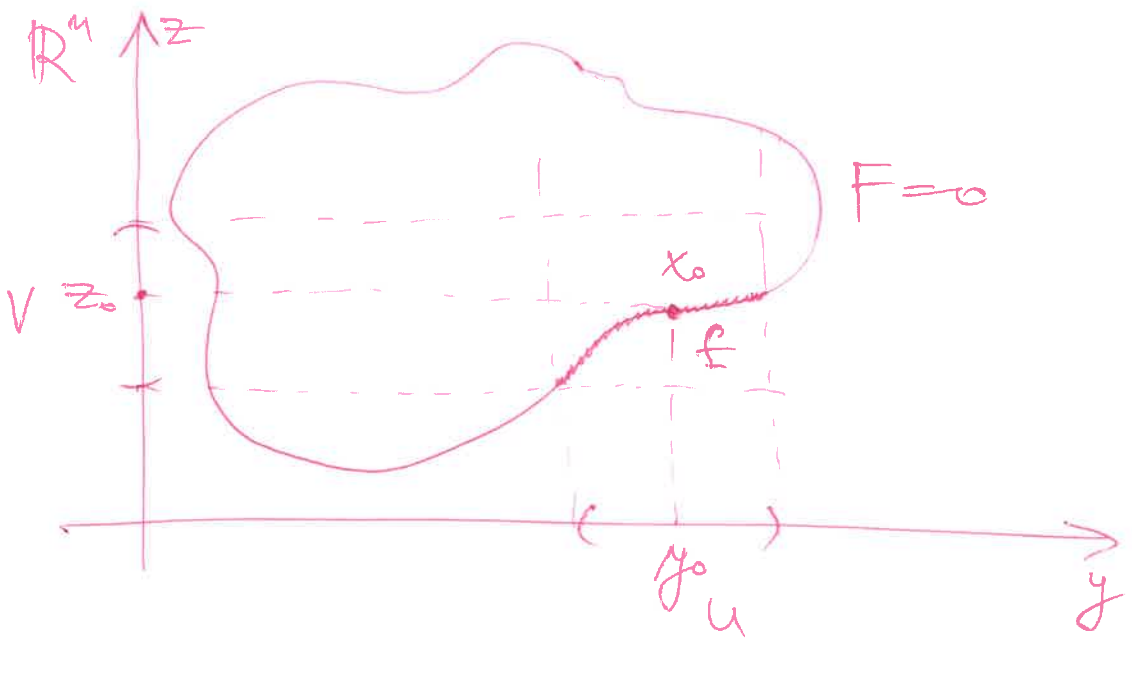
VĚTA: Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F: G \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^m $(m \geq 1)$, $x_0 \in G$ a $F(x_0) = o$.

Předpokládejme, že pro $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ platí

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(y_0, z_0) \right)_{i,j=1}^{n-k} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu y_0 a $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu z_0 taková, že $U \times V \subset G$ a existuje $f: U \to V$ třídy C^m taková, že

$$\operatorname{graf} f = F^{-1}(\{o\}) \cap (U \times V).$$



VĚTA (Implicitně zadaná plocha)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $F: G \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$. Nechť platí $\operatorname{rank} DF(x) = n-k$ v každém bodě $x \in F^{-1}(\{0\})$. Potom je $F^{-1}(\{0\})$ k-plocha v $\mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$.

DŮKAZ: Nechť $x_0 \in F^{-1}(\{0\})$. Protože $\operatorname{rank} DF(x_0) = n-k$, existuje regulární čtvercová submatice $DF(x_0)$ o $(n-k)$ řádcích (z Gaussovy eliminace). BÚNO: Předpokládejme, že

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\dots,n-k\\ j=k+1,\dots,n}}$$

je regulární (jinak přeznačíme proměnné). Píšeme opět $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Potom podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu y_0, okolí V bodu z_0 a $\mathcal{C}^\infty$ zobrazení $f: U \to V$ takové, že

$$\operatorname{graf} f = F^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V).$$

Víme ale, že $\operatorname{graf} f$ je jednoduchá k-plocha. $\blacksquare$

Př. 1) Jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$ 69

$S^{n-1} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ je $(n-1)$-plocha.

2) $S := \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$.