Domácí úloha 2 (Geometrie 2, ZS 2024/25)

1. příklad: (i) Ukažte, že

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

je těleso se skoro hladkou hranicí. Popište a nakreslete těleso M.
(ii) Spočtěte integrál

$$\int_{\partial M} \frac{dS}{(1+x+y)^2}$$

2. příklad: (i) Nechť $a > 0$. Ukažte, že

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 < 2ax\}$$

je 2-plocha. Popište a nakreslete plochu S.
(ii) Spočtěte integrál

$$\int_S (xy + xz + yz)\, dS$$

3. příklad: (i) Ukažte, že

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 = y^2 + z^2 + 1,\ 1 \leq x < \sqrt{2}\}$$

je 2-plocha. Popište a nakreslete plochu S. Dále na S najděte spojité normálové pole $\nu : S \to S^2$ takové, že $\nu_1 = \langle \nu, e_1 \rangle > 0$ na S.
(ii) Spočtěte integrál

$$\int_S xz\, dx \wedge dy,$$

je-li plocha S orientována normálovým polem ν.

4. příklad: (i) Nechť $a, b, c > 0$. Ukažte, že

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

je těleso s hladkou hranicí. Popište a nakreslete těleso M.
(ii) Spočtěte integrál

$$\int_{\partial M} z^3\, dx \wedge dy,$$

je-li ∂M orientována vnějším normálovým polem (vůči M).

[**Výsledky:** 1. $(\sqrt{3}-1)\ln 2 + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, 2. $\frac{64}{15}\sqrt{2}\, a^4$, 3. $-\frac{\pi}{4}$, 4. $\frac{4}{5}\pi abc^3$]