Domácí úloha 1 (Geometrie 2, ZS 2024/25)

Pro $R > r > 0$ uvažujme následující množinu

$$T^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\}$$

1. Ukažte, že T^2 je implicitně zadaná 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ (tzv. torus).

2. Ukažte, že T^2 je rotační plocha v $\mathbb{R}^3$, která vznikne rotací 1-plochy v rovině xz kolem osy z. Určete tuto 1-plochu. Nakreslete obrázek T^2.
[Návod: Určete $T^2 \cap P_v$, je-li $v \in \mathbb{R}$ a

$$P_v := \{(\rho\cos(v), \rho\sin(v), z) |\ \rho \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$

je polorovina v $\mathbb{R}^3$.]

3. Uvažujte zobrazení

$$\varphi(u,v) := ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

(i) Dokažte, že $\varphi(\mathbb{R}^2) = T^2$.
(ii) Nechť $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ a $U = (-\pi + u_0, \pi + u_0) \times (-\pi + v_0, \pi + v_0)$. Potom je $\varphi_{u_0,v_0} := \varphi|_U$ 2-mapa. Ukažte to podrobně pro $\varphi_{0,0}$. Popište obraz $\langle\varphi_{0,0}\rangle$.
(iii) Najděte nějaký konečný podatlas atlasu $\mathcal{A} = \{\varphi_{u_0,v_0} |\ (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2\}$ plochy T^2.
[Návod: (i) Užijte 2. (ii) Pro důkaz, že $\varphi_{0,0}$ je homeomorfismus, můžete užít kritérium ze 2. cvičení.]

4. Popište tečný prostor $T_X(T^2)$ v každém bodě $X \in T^2$. Najděte spojité vektorové pole $\nu : T^2 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $\nu(X)$ je jednotkový normálový vektor k T^2 v každém bodě $X \in T^2$.
[Návod: Pro popis $T_X(T^2)$ užijte parametrizaci φ. Za ν můžete vzít

$$\nu(X) = \frac{\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}}{\|\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\|}$$

je-li $X = \varphi(u,v)$. Proč?]