Orientace plochy

Připomeň: (i) orientací k-plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ je spojité $\tau : S \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ takové, že pro každý $x \in S$ je k-vektor $\tau(x)$ rozložitelný, $\|\tau(x)\| = 1$ a $\operatorname{Ker} \tau(x) = T_x S$.

(ii) každá souvislá orientovat. plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ má právě dvě různé orientace. [Bude ve přednášce]

(iii) Nechť $S = \langle \varphi \rangle$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je k-mapa. Potom zřejmě

$$\tau_\varphi(x) := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\|}, \quad x \in \langle \varphi \rangle \text{ a } x = \varphi(u),$$

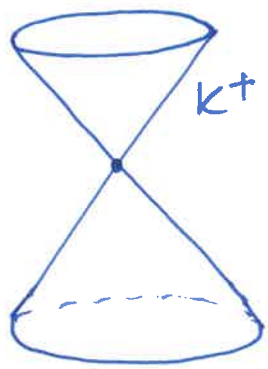
je orientace S indukovaná φ.

Př: Najděte vš. orientace kuželové plochy

$$K := \{x^2 + y^2 = z^2,\ z \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

---

(1) Nechť $K^+ := K \cap \{z > 0\}$.



$$\varphi : \begin{array}{l} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v, \\ z = u \end{array} \qquad \begin{array}{l} u \in (0, +\infty) \\ v \in \mathbb{R} \\ \quad (-\pi, \pi) \text{ mapa} \end{array}$$

OP2

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \cos v\, e_1 + \sin v\, e_2 + e_3$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -u\cdot\sin v\, e_1 + u\cdot\cos v\, e_2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial v} = e_{12}\cdot u + e_{13}\cdot u\cdot\sin v + e_{32}\cdot u\cdot\cos v$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2 = u^2+u^2 = 2u^2$$

2π – pozor, proč!

$$\tau_{\varphi}(X) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{12}+e_{13}\sin v + e_{32}\cos v\right),$$

$X=\varphi(u,v)$, $v\in(-\pi,\pi)$ $v\in\mathbb{R}$ ✓

Protože K^+ je souvislá, $\pm\tau_{\varphi}$ jsou vš. orientace K^+.

(2.) Na $K^- := \{z<0\}\cap K$ má právě 2 orientace $\pm\tau$ a na K právě 4 orientace.

Orientace nadploch

Orientace $(n-1)$-plochy $S\subset\mathbb{R}^n$ lze zadat spojitým normálovým polem. Nechť $\nu: S\to S^{n-1}$ je spojité pole takové, že pro každé $x\in S$ je $\nu(x)\in T_xS^{\perp}$. Potom $\tau_\nu(x) := *\nu(x)$, $x\in S$ je orientace S indukovaná normálovým polem ν.

Platí to i obráceně. Máme totiž $\nu(x) := (-1)^{n-1} *\tau(x)$, protože $** = (-1)^{n-1}$ na $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

⌈Skutečně, je-li $\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)\, e_i$, potom | OP3

$$*\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)\, (-1)^{i-1}\, \hat{e}_i,$$ kde

$\hat{e}_i := e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n$. Nechť $x \in S$.

Potom $\nu(x) = v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ pro $v_j \in T_x S$ a

$$*\nu(x) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}.$$ ⌋

Př. Pro K jako výše je

$$\nu(X) := *\tau(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos v, -\sin v, 1\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|, \quad X = \varphi(u,v)$$

Př Pro $R>r>0$ uvažme

$$M := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2\le r^2\}.$$

(i) Potom $M\subset\mathbb{R}^3$ je těleso s hladkou $\partial M = T^2$ (torus). Uvažme

$$(*)\quad \Phi(\rho,u,v) := \big((R+\rho\cdot\cos u)\cos v,\ (R+\rho\cos u)\cdot\sin v,\ \rho\cdot\sin u\big),\quad \rho\in(0,+\infty),\ u,v\in\mathbb{R}.$$

Z $\boxed{PC1}$ víme, že pro $\rho=r$ je

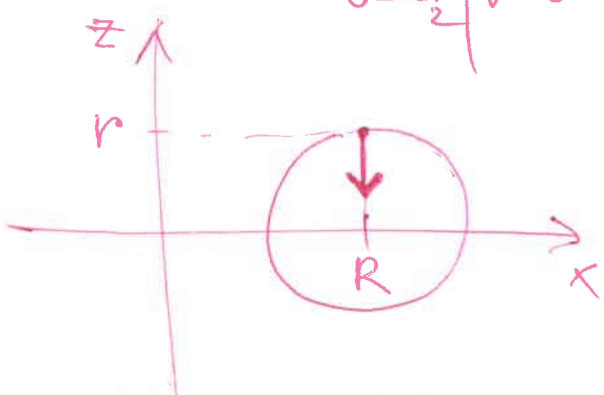
$$\varphi(u,v) := \Phi(r,u,v),\quad u,v\in\overset{\mathbb{R}^2}{(-\pi,\pi)}\ \text{mapa } \partial M$$

$$J\varphi = r\cdot(R+r\cdot\cos u) \quad \text{a}$$

$$\nu(X) = -(\cos u\cdot\cos v,\ \cos u\cdot\sin v,\ \sin u),$$

$$X=\varphi(u,v),\ u,v\in\mathbb{R}^2$$

je spojité jednotk. normálové pole na ∂M. Protože $\partial M = T^2$ je souvislé, je buď vnější, nebo vnitřní normálové pole na T^2. Protože $\underset{u=\frac{\pi}{2},\,v=0}{\nu(R,0,r)} = (0,0,-1)$ je vnitřní normál. vektor, je ν vnitřní normálové pole. Tedy $\nu_e := -\nu$ na T^2.



TOR2

(ii) Pro $F = (0,0,z)$ máme

$$\int_{T^2} \langle F, \nu_e \rangle \, dS = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} dv \; r^2 \sin^2 u \cdot (R + r \cdot \cos u)$$

$$= \underline{\underline{2\pi^2 r^2 R}} \overset{\text{Gauss}}{=} \lambda^3(M),$$ protože $\operatorname{div} F \equiv 1$ a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 u \, du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du = \pi.$$

(iii) Upravíme parametrizaci (*) množiny M, tj.

$$(x,y,z) = \Phi(\rho, u, v), \quad \rho \in (0, \cancel{}\, r), \; u, v \in (-\pi, \pi).$$

Potom

$$D\Phi = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} \cos u \cos v & -\rho \sin u \cos v & -\sin v \,(x) \\ \cos u \sin v & -\rho \sin u \sin v & \cos v \,(x) \\ \sin u & \rho \cos u & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{ccc} \quad A \quad & \quad\quad B \quad\quad & \quad C \quad \end{array} \end{array},$$

kde $(x) = (R + \rho \cos u)$ a

$$J\Phi = |\det(D\Phi)| = |\langle A, B \times C \rangle| =$$

$$= \rho\,(R + \rho \cos u) = \rho \cdot (R + \rho \cos(u)).$$ Máme

$$\lambda^3(M) = \int_0^r d\rho \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} dv \; \rho \cdot (R + \rho \cos u) =$$

$$= \underline{\underline{2\pi^2 r^2 R}} = (2\pi R) \cdot (\pi r^2)$$