Vnější algebra

Nechť V je vekt. prostor s bází $e_1, \dots, e_n$. Potom

- báze $\Lambda^*(V)$: $e_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}$

$$e_\emptyset := 1, \quad e_{\{i\}} = e_i$$
$$e_{\{12\}} = e_1 \wedge e_2 = e_{12} \text{ atd.}$$

- $\alpha = \sum_I \alpha_I e_I$, $\quad \alpha + \beta = \sum_I (\alpha_I + \beta_I) e_I$

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J \, e_I \wedge e_J$$

$$\boxed{e_i \wedge e_j = - e_j \wedge e_i = 0 \text{ pro } i = j}$$

Př: $\omega := e_{12} + e_{34} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$

Potom $\omega \wedge \omega = \underbrace{e_{12} \wedge e_{12}}_{=0} + e_{12} \wedge e_{34} + e_{34} \wedge e_{12} + \underbrace{e_{34} \wedge e_{34}}_{=0} = 2 e_{1234}$, protože

$$e_{34} \wedge e_1 = e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 = e_1 \wedge e_{34}$$

Rozložitelné multivektory

Míra na grafu funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená a $h : U \to \mathbb{R}$ je tř. $\mathcal{C}^1$. Uvažme

$$S := \operatorname{graf} h = \{(u, h(u)) \mid u \in U\}.$$

Víme, že $\varphi(u) := (u, h(u))$, $u \in U$ je mapa S a

$$D\varphi = \underbrace{\begin{array}{c} n \end{array}\left(\begin{array}{c} I_{n-1} \\ \hline \nabla h \end{array}\right)}_{n-1} \text{ řádek} \quad \text{a} \quad D\varphi^T D\varphi = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial h}{\partial u_i}\frac{\partial h}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{n-1} = I_{n-1} + \underbrace{\nabla h^T \nabla h}_{\text{řádek}}$$

(i) Sylvester*: $\det(D\varphi^T D\varphi) = 1 + \nabla h \nabla h^T = 1 + \|\nabla h\|^2$ v $\mathbb{R}^{n-1}$,

tudíž $J\varphi = \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}$ a

$$\int_S f(x)\, dS(x) = \int_U f(u, h(u)) \sqrt{1 + \|\nabla h(u)\|^2}\, d\lambda^{n-1}(u).$$

*) Sylvesterův vzorec: Je-li $a, b \in \mathbb{R}^n$ (sloupcové), potom

$$\det(I_n + ab^T) = 1 + a^T b$$

Důkaz: $A := \begin{pmatrix} I_n & -a \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 + b^T a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} I_n & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n + ab^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}$$

Potom $\det A = 1 \cdot (1 + b^T a) \cdot 1 = 1 \cdot \det(I_n + ab^T) \cdot 1$

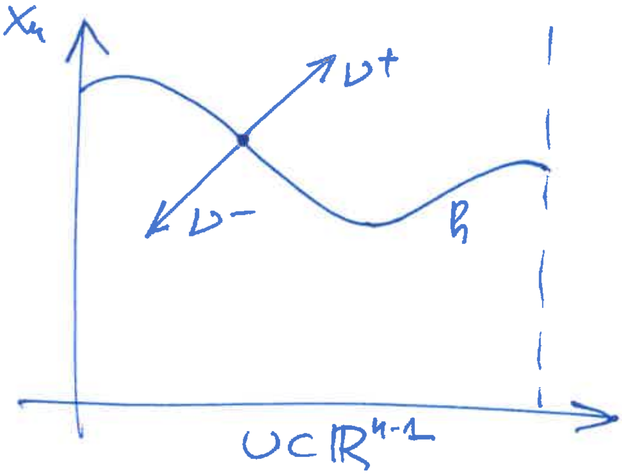
(ii) Jinak: $J\varphi = \Big\| \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \dots \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}}_{= N} \Big\| = \sqrt{1+\|\nabla h\|^2}$ Gr2

- $N_n = (-1)^{n+1} \underbrace{|I_{n-1}|}_{=1}$
- N je kolmý ve všech $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = \left(0|\dots|\underset{i}{1}|\dots|0|\frac{\partial h}{\partial u_i}\right)$, tzn.

  $N := (-1)^{n+1}\left(-\frac{\partial h}{\partial u_1}\Big|\dots\Big|-\frac{\partial h}{\partial u_{n-1}}\Big|1\right)$

(iii) Dané $\nu^\pm(x) := \pm(-1)^{n+1}\dfrac{N(\varphi^{-1}(x))}{\|N(\varphi^{-1}(x))\|}$, $x \in S$ je spojité pole jednotkových normálových vektorů, které "směřují" do nadgrafu/podgrafu h! (Proč?)

[ZAJÍČEK]



Gaussova věta o divergenci na speciálních množinách $\boxed{\text{Ga3}}$

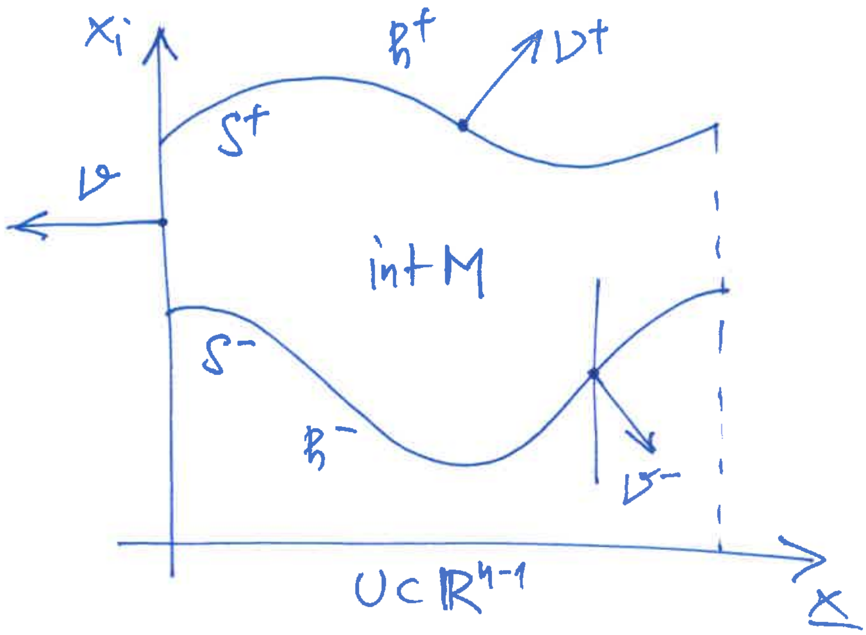
DEF Nechť $1 \le i \le n$. Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^n$ je *i-speciální*, pokud

(i) splňuje všechny předpoklady Gaussovy věty (GV) o divergenci z $\boxed{\text{Ga2}}$;

(ii) $\operatorname{int} M$ je ve směru i množina mezi grafy $\mathcal{C}^1$-zobrazení, tzn. existuje otevřená $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a $\mathcal{C}^1$-zobrazení $h^{\pm}: U \to \mathbb{R}$ taková, že $h^- < h^+$ na U a

$$\operatorname{int} M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \underline{x} \in U,\ h^-(\underline{x}) < x_i < h^+(\underline{x})\},$$

kde $\underline{x} := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.



6a6

VĚTA: Nechť $1 \le i \le n$ a $M \subset \mathbb{R}^n$ je i-speciální mn. Nechť $f: M \to \mathbb{R}$ je třídy $\mathcal{C}^1$. Potom

$$(GV_i) \quad \int_{\mathrm{int}\, M} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\lambda^n = \int_{\partial M} f \cdot \nu_i \, dS.$$

Kde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ je pole vnější jednotk. normálový vektorů na $\partial_* M$.

Pozn: Je-li ∂M $(n-1)$-plocha, rozumíme

$$\partial_* M := \partial M.$$

DŮKAZ: BÚNO: $i = n$

Potom $x = (\underline{x}, x_n)$, kde $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Protože $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je spojitá na kompaktu M, podle Fubiniho věty dostaneme

$$(1) \quad \int_{\mathrm{int}\, M} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx = \int_U \left(\int_{h^-(\underline{x})}^{h^+(\underline{x})} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}, x_n)\, dx_n \right) d\underline{x}$$

$$\underset{\text{Newtonův vzorec}}{=} \int_U \left(f(\underline{x}, h^+(\underline{x})) - f(\underline{x}, h^-(\underline{x})) \right) d\underline{x}.$$

Nechť $S^\pm = \text{graf } h^\pm$. Potom z $\boxed{Gr2}$ je

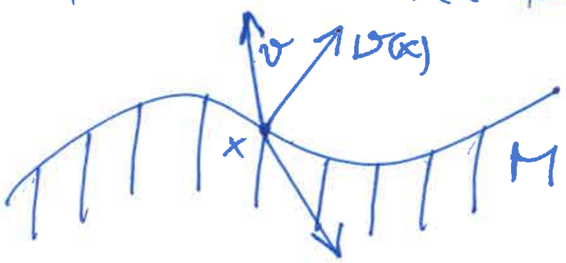
$$\nu_n(\underline{x}, h^\pm(\underline{x})) = \pm 1 \Big/ \sqrt{1 + \|\nabla h^\pm(\underline{x})\|^2},$$

tudíž

(2) $$\int_{S^\pm} f \nu_n \, dS = \pm \int_U f(\underline{x}, h^\pm(\underline{x}))\, d\underline{x},$$

Je zřejmé $\partial M = S^+ \cup S^- \cup B$, kde $B := \{x \in \partial M \mid \underline{x} \in \partial U\}$. Protože $\nu_n = 0$ na $B \cap \partial_* M$, plyne z (1) a (2) rovnost (GV_n).

Skutečně, lze snadno ukázat, že $v \in \mathbb{R}^n$ směřuje ven z (dovnitř) M v $x \in \partial_* M$, pokud $\langle v, \nu(x) \rangle > 0$ (< 0). Žádný z vektorů $\pm e_n$ zřejmě nesměřuje dovnitř M v bodě $x \in B \cap \partial_* M$. ▨



[ZAJÍČEK]

(1,) Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je i-speciální pro každé $i = 1, \dots, n$. Potom pro M platí (GV). Skutečně, z (GV_i) pro $F: M \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$ platí, že

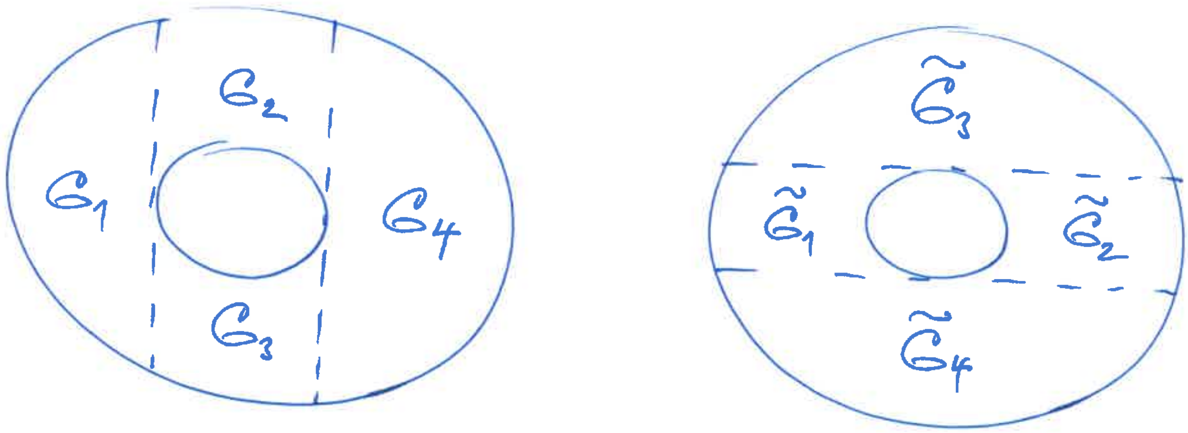
$$\int_{\mathrm{int}\, M} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, d\lambda^n = \int_{\partial M} F_i \cdot \nu_i \, dS.$$

Sečtením těchto rovností pro $i = 1, \dots, n$, dostaneme (GV).

Např. $M = \overline{B(x_0, R)}$ (uz. koule), $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ (uz. interval), atd.

Gauß

(2.) Řadu 'jednoduchých' $M \subset \mathbb{R}^n$ lze v každém směru i rozložit na konečně mnoho i-speciálních množin, na kterých platí (GV_i). Sečteme-li (GV_i) přes všechny část rozkladu, dostaneme (GV_i) pro celé M a pak i (GV). Na OBR. je takový rozklad <u>množiny</u> $M \subset \mathbb{R}^2$ v obou směrech $i = 1, 2$.



<u>Pozn:</u> I když důkaz pro obecné $M \subset \mathbb{R}^n$ je velmi složitý, postupujeme podobně, tj. "rozložíme" M na spočetně mnoho speciálních množin ...