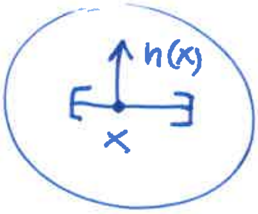
Gaussova věta o divergenci (klasická)

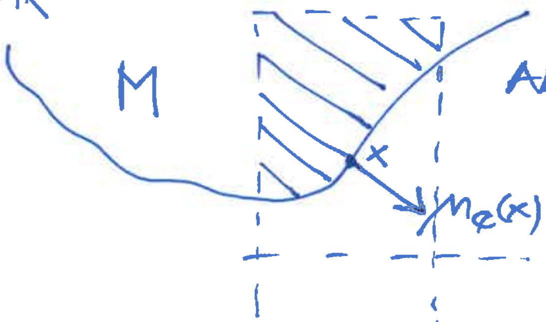
Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je <u>těleso</u> se (<u>skoro</u>) <u>hladkou hranicí</u>, tzn. $M = \overline{\operatorname{int} M}$ a ∂M je (zobecněná) $(n-1)$-plocha (*).

<u>Pozn:</u> $M \subset \mathbb{R}^n$ je <u>těleso</u> (tzn. $M = \overline{\operatorname{int} M}$), právě když ex. $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $M = \overline{G}$ a $G = \operatorname{int} \overline{G}$. (Zřejmě $G = \operatorname{int} M$.) Potom $\partial M = \partial G$.

Př. $G := B(0,1) \setminus \left([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\} \right) \subset \mathbb{R}^2$



NE!



ANO

<u>a)</u> Nechť ∂M je $(n-1)$-plocha. Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ je mapa ∂M. Potom ex. spojité $n : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{R}^n$ tak, že $n(x)$ je jednotkový normálový vektor v $x \in \langle \varphi \rangle$ k ploše ∂M. Stačí vzít $n(x) := N(\varphi^{-1}(x))$, kde
$$N(u) := \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}(u) \Big/ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}(u) \right\|.$$

(T) V každém $x \in \partial M$ existuje jediný <u>vnější</u> (<u>vnitřní</u>) <u>jednotk. normál.</u> vektor $n_e(x) \in \mathbb{R}^n$ ($n_i(x) \in \mathbb{R}^n$) <u>vůči M</u>, tzn. $n_e(x)$ ($n_i(x)$) je

jednotk. normál. vektor v $x \in \partial M$ a <u>směřuje</u> <u>ven</u> z (<u>dovnitř</u>) M (tj. ex. $\delta > 0$ takové, že $x + t n_e(x) \notin M \;\; \forall t \in (0, \delta)$,
$x + t n_i(x) \in \operatorname{int} M$ —"—)

Navíc $n_i = -n_e$ a $n_e : \partial M \to \mathbb{R}^n$ je spojité.

<u>Důkaz</u>: viz ZAJÍČEK.

<u>b)</u> Nechť ∂M je zobecněná $(n-1)$-plocha, tzn. má rozklad $\partial M = S_1 \cup \ldots \cup S_p \cup M_1 \cup \ldots \cup M_q$, kde $p \geq 1$, S_j jsou jednoduché $(n-1)$-plochy a M_i jsou plochy menší dimenze než $(n-1)$. Označ. $\partial_* M := S_1 \cup \ldots \cup S_p$, tzn. <u>'regulární' hranici</u> M.
Potom $n_e : \partial_* M \to \mathbb{R}^n$ je dobře definováno a spojité (viz ZAJÍČEK).

<u>VĚTA</u> (Gaussova o divergenci) Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je jako výše (*). Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a ∂M má konečnou plošnou míru (tzn. $\lambda_{\partial M}(\partial M) < +\infty$).
Nechť $F : M \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^1$, tzn. ex. otevřená $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $M \subset \Omega$ a $\tilde{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tř. $\mathcal{C}^1$ tak, že $\tilde{F}|_M = F$. Potom

$$\int_{\operatorname{int} M} \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial M} \langle F, n_e \rangle \, dS, \quad (GV)$$

kde $\operatorname{div} F := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$ je <u>divergence</u> pole F.

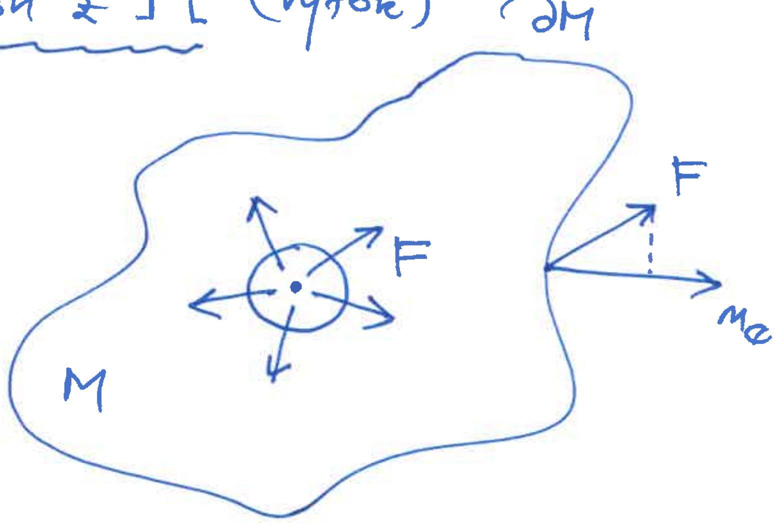
<u>Důkaz</u>: viz Zajíček, skripta Černý & Pokorný (kap. 17)

- <u>Tok pole F přes ∂M ven z M</u> (výtok)

$$\int_{\partial M} \langle F, n_e \rangle \, dS$$

velikost normálové složky F

<u>plošný integrál 2. druhu</u>

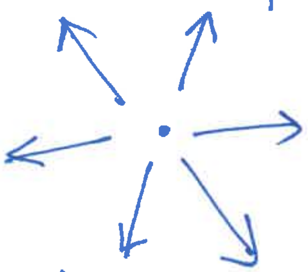


- <u>Divergence pole F</u>: Je-li $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tř. C^1, Ω ot., potom pro každé $x \in \Omega$ je

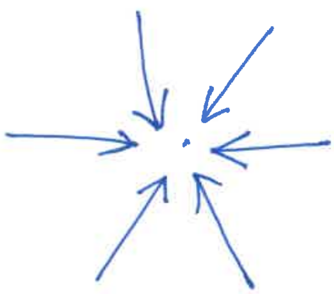
$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda^n(B(x,r))} \int_{\underset{\text{koule}}{B(x,r)}} \operatorname{div} F \, d\lambda^n \overset{\text{Gauss}}{=}$$

$$= \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda^n(B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} \langle F, n_e \rangle \, dS,$$

tzn. $\operatorname{div} F(x)$ je objemová hustota výtoku pole F z (nekonečně) malé koule kolem x, udává „míru rozpínání či smršťování" v x.



$\operatorname{div} F(x) > 0$ (zdroj)



$\operatorname{div} F(x) < 0$ (výpusť)

6a4

Pří (i) elektrostatické / gravitační pole F:
$F(x)$ je síla, kterou pole působí na jednotkový
kladný náboj / hmotný bod v x

(ii) pole rychlosti pro ustálené proudění kapaliny

Pří Ověřte přímým výpočtem, že platí Gaussova věta o divergenci, pokud

1. $M := \{x^2+y^2+z^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$ a $F = (x^3, y^3, z^3)$
2. $M := [0,1]^3$ a $F = (x^2, y^2, z^2)$ [3]
3. $M := \{x^2+y^2+z^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$ a $F = (0, 0, z^3)$ [$4\pi/5$]

Pří Ukažte, že

(a) $\forall v \in \mathbb{R}^n: \quad \displaystyle\int_{\partial M} \langle v, n_e \rangle \, dS = 0$

(b) $\lambda^n(M) = \lambda^n(\operatorname{int} M) = \displaystyle\int_{\partial M} \langle F, n_e \rangle \, dS$, je-li

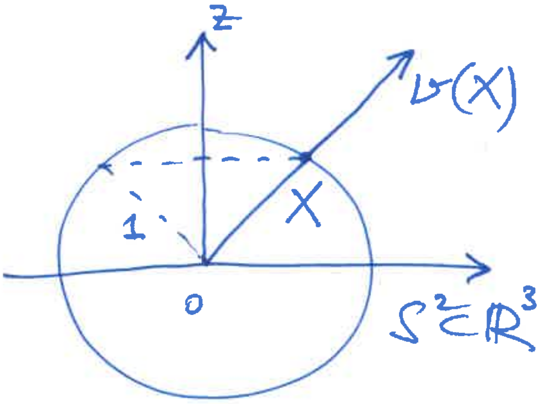
$\operatorname{div} F \equiv 1$ na M, např. $F(x) = \frac{1}{n} x$, $(x_1, 0, \dots, 0)$, $(0, \dots, x_i, 0, \dots, 0)$
atd. [z Gausse]

Př. $M := \{x^2+y^2+z^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$, $F := (0,0,z^3)$

① $M \subset \mathbb{R}^3$ je těleso s hladkou hranicí $\partial M = S^2$ a $\nu(X) := X$, $X \in S^2$ je vnější jednot. normál. vektor

<u>Sférické souřadnice</u>:

$$\varphi: \begin{array}{l} x = \cos u \cdot \cos v \\ y = \sin u \cdot \cos v, \\ z = \sin v \end{array} \qquad \begin{array}{l} u \in (-\pi, \pi) \\ v \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$



$J\varphi = \cos v$

Potom
$$\int_{\partial M} \underbrace{\langle F, \nu \rangle}_{= z^4} dS = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \, \sin^4 v \cdot \cos v =$$
$$= 2\pi \left[\frac{\sin^5 v}{5} \right]_{v=-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{4}{5}\pi}}.$$

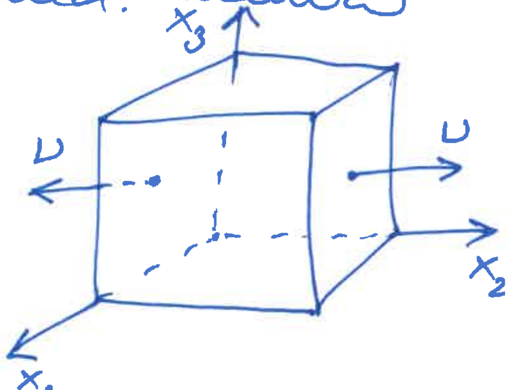
② $\operatorname{div} F = 3z^2$

$$\int_M \operatorname{div} F \, d\lambda^3 \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-1}^{1} dz \, 3z^2 \cdot \underbrace{\pi \cdot (1 - z^2)}_{\lambda^2(M_z) \text{ řez } M} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{5}\pi}}$$

Př. 1) Ověřte Gauss. větu o divergenci příslušným výpočtem pro $M=[0,1]^3$ a $F=(x^2,y^2,z^2)$ (x_1^2,x_2^2,x_3^2). [3]

x

1. $M=[0,1]^3$ je těleso se skoro hlad. hranicí



(i) $\operatorname{int} M = M_{\circ\circ\circ} := (0,1)^3$

(ii) $M_{\underset{\circ}{1}\cdot\cdot} := \{x_1=1;\ x_2,x_3\in(0,1)\}$

jednod. 2-plocha

Zřejmě je $\nu := (1,0,0)$ na $M_{1\cdot\cdot}$

$:= (-1,0,0)$ na $M_{0\cdot\cdot}$

vnější jednotkový vektor. Podobně pro stěny $M_{\cdot\underset{\circ}{1}\cdot}$ a $M_{\cdot\cdot\underset{\circ}{1}}$ $3\times 2=\boxed{6 \text{ stěn}}$

Potom $\partial_* M$ je sjednocení všech stěn M.

(iii) $M_{0,1,\cdot} := \{x_1=0,\ x_2=1,\ x_3\in(0,1)\}$ je hrana M atd. $3\cdot 2^2=\boxed{12}$

(iv) $M_{1,0,1} := \{(1,0,1)\}$ je vrchol M atd. $2^3=\boxed{8}$

2. $I := \int_{\partial M} \langle F,\nu\rangle\, dS = \underline{\underline{3}}$, protože

$\int_{M_{\underset{\circ}{1}\cdot\cdot}} x_1^2\, dx_2\, dx_3 = 1$

$\varphi(x_2,x_3) := (1,x_2,x_3)$

$dS = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\times\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right\| dx_2\, dx_3$

$= 0$

$(0,1,0)\times(0,0,1) = (1,0,0)$

3. $\operatorname{div} F = 2(x_1+x_2+x_3)$, $\int_{(0,1)^3} \operatorname{div} F\, dx^3 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\underline{\underline{3}}$

Rozložitelné multivektory

DEF Řekneme, že $\omega \in \Lambda^k(V)$ je *rozložitelný*, pokud ex. $v_1, \dots, v_k \in V$ taky, že $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

Pří $\omega := e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ není rozložitelný, protože $\omega \wedge \omega = 2\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$.

1. $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$, právě když $v_1, \dots, v_k \in V$ jsou lineárně nezávislé.

(i) Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou lin. závislé. Potom ex. i taky, že $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$ a

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{j \neq i} a_j \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{v_j} \wedge \dots \wedge v_k}_{=0} = 0.$$

(ii) Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé. Potom je doplníme na bázi $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$ prostoru V.

Máme $\underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_k}_{\neq 0} \wedge \dots \wedge v_n = \underset{\neq 0}{\det W}\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$.

W matice souřadnic $v_1, \dots, v_n$

2. Nechť $\omega := v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$.
Potom $\operatorname{Ker} \omega = \operatorname{Lo}\{v_1, \dots, v_k\}$,
kde $\operatorname{Ker} \omega := \{v \in V \mid v \wedge \omega = 0\}$.

$\boxed{\supseteq}$ Zřejmě je $\operatorname{Ker} \omega$ podprostor V a $v_i \in \operatorname{Ker} \omega$.

$\boxed{\subset}$ Nechť $v \in \operatorname{Ker}\omega$, tzn. $\underbrace{v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k}_{\text{jsou lin. závislé}} = 0$. RV2

Tedy $v \in \mathcal{L}o\{v_1, \dots, v_k\}$.

(3.) Označme $R_k(V) := \{\omega \in \Lambda^k(V) \mid 0 \neq \omega \text{ rozlož.}\}$

Nechť $\omega, \omega' \in R_k(V)$. Potom $\operatorname{Ker}\omega = \operatorname{Ker}\omega'$, právě když $\exists \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \omega' = \alpha\omega$.

$\boxed{\Leftarrow}$ jasné; $\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $\mathcal{L}o\{v_1, \dots, v_k\} = \mathcal{L}o\{v_1', \dots, v_k'\}$

dvě báze stejného k-dim. podprostoru

Potom $v_i' = \sum_{j=1}^{k} E_i^j v_j$ a $v_1' \wedge \dots \wedge v_k' = \underbrace{\det(E_i^j)}_{= \alpha} v_1 \wedge \dots \wedge v_k$

matice přechodu, regulární

Pozn: Každý orientovaný k-dim. podprostor $L \subset V$ je jednoznačně určený nějakým $\omega \in R_k(V)$, $\|\omega\| = 1$ a obráceně.

[Je-li $v_1, \dots, v_k$ kladně orient. báze L, potom $\omega := (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)/\|v_1 \wedge \dots \wedge v_k\|$.]

Plückerovo vnoření*

Definujme $G_k(V) := \{L \mid L$ je k-dimenz. podprostor $V\}$, tzv. Grassmanián.

Pozn: (i) $G_1(V) = P(V)$ je projektivní prostor V z G1.

(ii) $G_k(\mathbb{R}^n)$ lze považovat za $k\cdot(n-k)$-plochu v $\mathbb{R}^{n\times n}$ (MILNOR, více analýza na kvocientě)

— x —

Nechť $L \in G_k(V)$ a $v_1, \dots, v_k$ je báze L. Potom $0 \neq \omega := v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k(V)$. Pro danou bázi $e_1, \dots, e_n$ na V máme $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I e_I$, kde $\{\omega_I \mid |I| = k\}$ jsou Plückerovy souřadnice ω. Z předchozího je jasné, že Plückerovo vnoření

$$\iota : G_k(V) \longrightarrow P(\Lambda^k(V)) \simeq P\left(\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}\right),$$

$$L \longmapsto [\omega] \simeq [\omega_I \mid |I| = k] \dots$$ homogenní souřadnice $[\omega]$

kde ω je pro L definováno jako výše a $[\omega] := \{\alpha\omega \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, je dobře definováno.

Vnoření $\iota(G_k(V))$ je charakterizováno (kvadratickými) Plückerovými relacemi.

Př: $[\omega] \in \iota(G_2(\mathbb{R}^4)) \iff \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0$

projektivní kvadrika v $P(\mathbb{R}^6)$