Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (!)

LEMMA Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Je-li $f: V \to \mathbb{R}$ lineární forma, potom existuje jediné $v \in V$ tak, že

$$f(w) = \langle w, v \rangle, \quad w \in V \qquad [\text{známo?}]$$

DŮKAZ: Nechť $e_1, \dots, e_n$ je ON-báze V. Pokud takové v existuje, potom

$$f(e_i) = \langle e_i, v \rangle = v^i,$$

neboli $v = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i$. Ale pro takto definované v dostaneme, že pro každé

$$w = \sum_{j=1}^n w^j e_j \text{ je } f(w) = \sum_{j=1}^n w^j \underbrace{f(e_j)}_{= v^j} = \langle w, v \rangle. \qquad \blacksquare$$

Nechť $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$Lw := \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad w \in \mathbb{R}^n$$

je lineární forma a z Lemmatu existuje jediný $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že $Lw = \langle w, v \rangle$, $w \in \mathbb{R}^n$.

Položme $v_1 \times \dots \times v_{n-1} := v \in \mathbb{R}^n$, tj. VS2

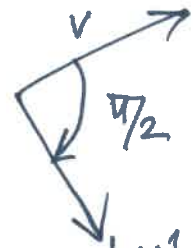
(*) $\langle w, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}),\quad w \in \mathbb{R}^n.$

——— × ———

V souřadnicích: $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \left(\det(e_i, v_1, \dots, v_{n-1})\right)_{i=1}^{n}$

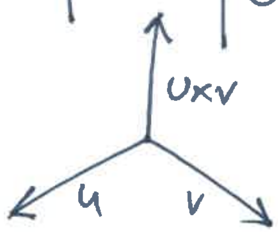
$\boxed{n=2}$ $\quad \times v = \times \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 \\ -v^1 \end{pmatrix}$

unární operace



$\boxed{n=3}$ $\quad u \times v = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & u^1 & v^1 \\ 0 & u^2 & v^2 \\ 0 & u^3 & v^3 \end{pmatrix}$$



pravidlo pravé ruky

Vlastnosti:

(1) $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = 0$, právě když jsou $v_1, \dots, v_{n-1}$ lineárně závislé

(2) $\langle v_i, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n-1$

(3) $v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_1 \times \dots \times v_{n-1}$
pro každou permutaci σ indexů $\{1, \dots, n-1\}$.

(4) $\|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\det\underbrace{\left(\langle v_i, v_j \rangle\right)_{i,j=1}^{n-1}}_{\text{Gramova matice}}}$, což

je rovno objemu $\underbrace{\text{rovnoběžnostěnu}}_{R(v_1, \dots, v_{n-1})}$ určeného vektory $v_1, \dots, v_{n-1}$.

Důkaz: (1), (2), (3) plyne z $(\ast)$; $\quad V_0 \atop \ddot{\text{ii}}$ $\quad$ VS3

(4) $\|v_1\times\dots\times v_{n-1}\|^2 = \langle v_1\times\dots\times v_{n-1}, v_1\times\dots\times v_{n-1}\rangle$

$$\overset{(\ast)}{=} \underbrace{\det(v_1\times\dots\times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1})}_{\text{objem rovnoběžnostěnu v } \mathbb{R}^n} \qquad (\triangle)$$

$$\underset{\substack{\text{kolmost}\\ \text{FUBINI}}}{=} \|v_1\times\dots\times v_{n-1}\|\cdot \lambda_V(R(v_1,\dots,v_{n-1})),$$

kde $V = Lo\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$. $\square$

pro lin. nez.

---

(5) Jsou-li $v_1,\dots,v_{n-1}$ lineárně nezávislé, potom je $v_1\times\dots\times v_{n-1}, v_1,\dots,v_{n-1}$ <u>kladně orientovaná</u> <u>báze</u> $\mathbb{R}^n$. (z $(\triangle)$)

<u>Orientace vektorového prostoru V</u>

Nechť $e_1,\dots,e_n$ a $e_1',\dots,e_n'$ jsou dvě báze V a nechť $E=(E^i_j)$ je matice přechodu mezi nimi, tzn. $e_j' = \sum_{i=1}^{n} E^i_j e_i$. Potom řekneme, že tyto báze jsou <u>souhlasně</u> (<u>opačně</u>) <u>orientovány</u>, pokud $\det E > 0$ (<0). Systém všech bází V se rozpadne na 2 třídy souhlasně orient. bází. Tyto třídy se nazývají <u>orientace</u> V.

Pokud na V máme zadánu orientaci $\mathcal{O}$, mluvíme o orientovaném vektor. prostoru $(V, \mathcal{O})$.

Řekneme, že báze $\mathcal{B}$ orientovaného prostoru $(V, \mathcal{O})$ je kladně (opačně) orientovaná, je-li $\mathcal{B} \in \mathcal{O}$ ($\notin$).

Pozn: (i) Je-li $e_1, \dots, e_n$ kladně orient. báze V, potom např. $-e_1, e_2, \dots, e_n$ nebo $e_2, e_1, e_3, \dots, e_n$ jsou opačně orient. báze.

(ii) Standardní orientace na $\mathbb{R}^n$ je zadána standardní bází $e_1, \dots, e_n$, kde $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.

Topologické vlastnosti ploch

(1.) Najděte 2-plochu v $\mathbb{R}^3$, která je

- kompaktní
- omezená nekompaktní
- neomezená uzavřená
- neomezená neuzavřená

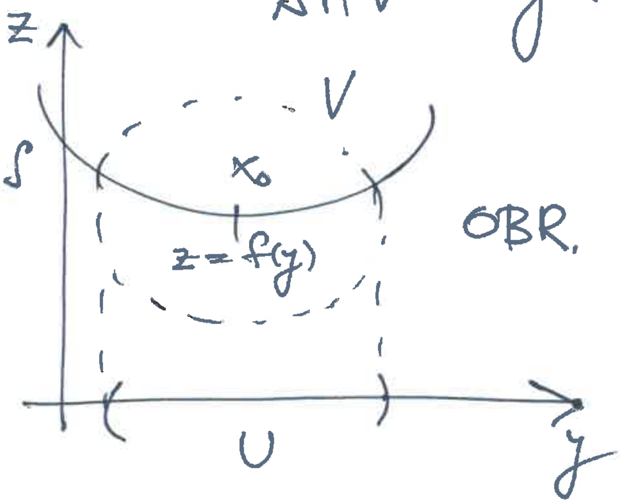
(2.) (!) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $k < n$. Ukažte, že (i) S je (relativně) otevřená v $\overline{S}$;

(ii) S je borelovská v $\mathbb{R}^n$ a $\lambda^n(S) = 0$;

(iii) S je řídká, tzn. $\operatorname{int} \overline{S} = \emptyset$.

Nechť $x_0 \in S$. Potom ex. okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu x_0 a $f : \underset{\text{oten.}}{U \subset \mathbb{R}^k} \to \mathbb{R}^n$ tř. C^m tak, že

$$S \cap V = \operatorname{graf} f \overset{?}{=} \overline{S} \cap V. \qquad (x)$$



OBR.

Skutečně, nechť $(y, z) \in \overline{S} \cap V$ a $S \cap V \ni (y_k, z_k) \to (y, z)$. Ze spojitosti f v y plyne $z_k = f(y_k) \to f(y) = z$, tudíž $(y, z) \in S \cap V$.

Platí (i). Z (i) jasné, že S je borelovská v $\mathbb{R}^n$.

⇒ Fubiniho věty je zřejmé $\lambda^n(\text{graf} f) = 0$. $\boxed{\text{Top2}}$

Víme, že existuje spočetné otevřené pokrytí $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ plochy S takové, že $S \cap V_i$ je grafem funkce. Tudíž $\lambda^n(S) = 0$.

(iii) Nechť $x_1 \in \overline{S}$ a $W \subset \mathbb{R}^n$ je okolí x_1.

Ex. $x_0 \in S \cap W$ a okolí $V \subset W$ bodu x_0 tak, že (X).

Tedy $V \not\subset \overline{S}$, tudíž ani $W \not\subset \overline{S}$, tj. $x_1 \notin \operatorname{int} \overline{S}$. ▨

---

(3) Ukažte, že jednoduchá plocha nemusí být kompaktní.

?? Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{na}} S \subset \mathbb{R}^n$ je mapa.

otev.
komp.
obojetná ↯↯

kompakt

homeom.

Jednoznačnost dimenze

Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ jsou otevřené a $f: U \xrightarrow{na} V$ je bijekce. Ukážeme, že $\boxed{k = l}$, je-li

(!) 1. f difeomorfismus tř. $\mathcal{C}^1$ (tzn. f i f^{-1} jsou tř. $\mathcal{C}^1$)

nebo

2.* f je homeomorfismus

---

ad 1. Nechť $u \in U$ a $v := f(u)$. Protože

$$f^{-1} \circ f = id_U \quad a \quad f \circ f^{-1} = id_V, \text{ platí}$$

$$\underbrace{Df^{-1}(v) \circ Df(u) = id_{\mathbb{R}^k}}_{\text{prostá}} \quad a \quad \underbrace{Df(u) \circ Df^{-1}(v) = id_{\mathbb{R}^l}}_{\text{na}}.$$

Tedy $Df(u): \mathbb{R}^k \xrightarrow{na} \mathbb{R}^l$ je izomorfismus a $k = l$.

ad 2. Užijeme <u>Brouwerovu větu o invarianci</u>:

Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a $f: U \to \mathbb{R}^k$ je prostá a spojitá. Potom $f(U)$ je otevřená v $\mathbb{R}^k$ a f je homeomorfismus U na $f(U)$.
[bez důkazu, těžké]

(!) potřeba na přednášce