Implicitně zadané plochy

Ukažte, že 1) jednotková sféra

$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha.

2) $S := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$ (2-sféra)

---

1) $F(x) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^n$,

$DF(x) = 2 \cdot (x_1, \dots, x_n) = 0$ pouze v $x = 0 \notin S^{n-1}$.

2) $F(x) := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

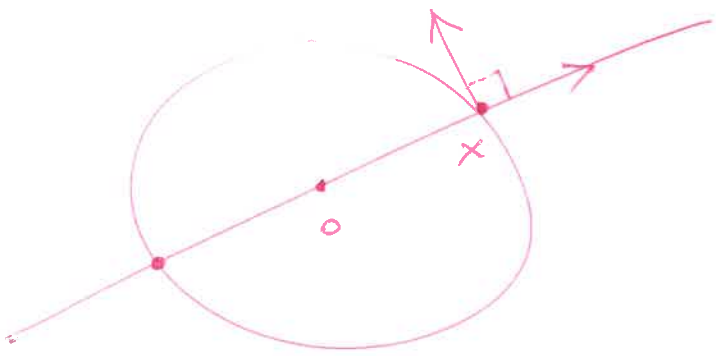
je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^4$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid F(x) = 0\}$ a

$$DF(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ má hodnost 2

pro každé $x \in S$. Je-li totiž rank $DF(x) < 2$,

potom $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$,

ale $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \notin S$.



Sférické souřadnice

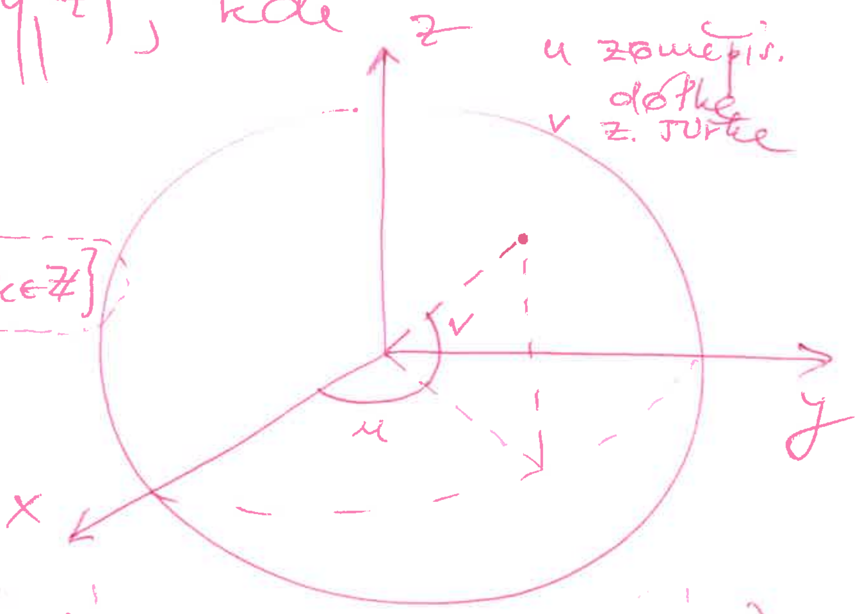
Nechť $\varphi(u,v) := (x,y,z)$, kde

$x = \cos u \cdot \cos v$

$y = \sin u \cdot \cos v$

$z = \sin v$

(i) φ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{v = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je parametr. 2-plocha v $\mathbb{R}^3$



Skutečně,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \cos v & -\cos u \cdot \sin v \\ \cos u \cdot \cos v & -\sin u \cdot \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}$$

Pozn: Nechť $\varphi : \underset{\text{otevř.}}{U} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je ~~param.~~ zobrazení tř. $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$. Potom z minula víme, že v $u \in U$ je rank $D\varphi(u) = k$, právě když

$$J\varphi(u) := \sqrt{\det(\underbrace{D\varphi(u)^T D\varphi(u)}_{\text{gramián}})} > 0.$$

$\boxed{\text{bude důležité pro integrování!}}$

Je-li $k = n$, potom $J\varphi(u) = |\underbrace{\det(D\varphi(u))}_{\text{jacobián}}|$.

$$D\varphi(u,v)^T D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J\varphi(u,v) = |\cos v| \neq 0$$

pro $v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\varphi_0 := \varphi|_{(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ je mapa S^2, $\boxed{\text{SFE2}}$

$\langle\varphi_0\rangle = S^2 \setminus \{(x,0,z) \mid x \le 0,\ x^2+z^2=1\}$ a

poledník 180°

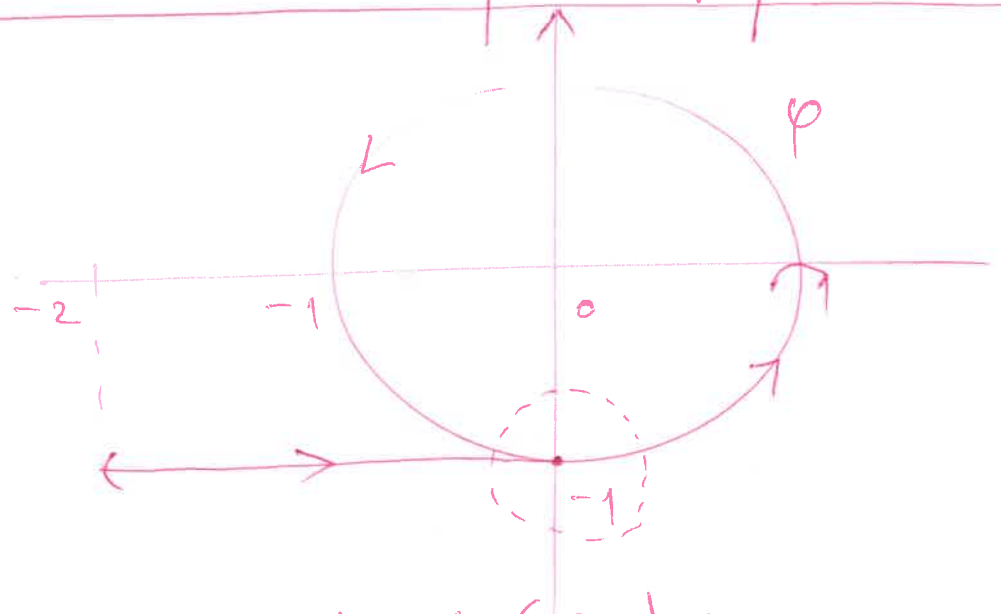
φ_0 je homeomorfismus (viz. přísl. na $\boxed{\text{HoM3}}$)

(iii) Najděte rotaci $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takovou, aby φ_0 a $\rho\circ\varphi_0$ tvořily atlas S^2.

(iv) Zkuste to zobecnit pro S^{n-1}. *

Homeomorfismus versus prosté spojité zobrazení

Př. 1



- Položme $\varphi(t) := (t,-1)$, $t\in(-2,0)$;
  $:= \left(\cos\left(-\pi/2+t\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)$, $t\in[0,2\pi)$
- Zřejmě φ je regulární paramet. křivky třídy C^1 a φ je prostá. Ale φ <u>není</u> homeomorfismus $(-2,2\pi)$ na $\langle\varphi\rangle$, tzn. φ <u>není</u> 1-mapa.

  Skutečně, $(\varphi^{-1})^{-1}\left(\left(-2,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \varphi\left(\left(-2,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ není otevřená v $\langle\varphi\rangle$, protože bod $(0,-1)$ není její vnitřní bod.

Nechť $f: X \to Y$ je spojité zobrazení mezi metrickými prostory a X je kompakt.

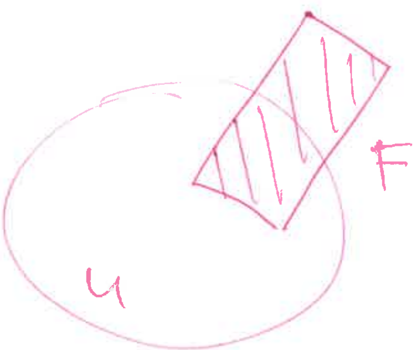
1) Potom je f uzavřené, tzn. pro každou uzavřenou $F \subset X$ je $f(F)$ uzavřený v Y.
(kompakt) (kompakt)

Je-li navíc f prostá, potom je f homeomorfismus X na $f(X)$.

⌈skutečně, je-li $F \subset X$ uzavřená, je $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ uzavřená.⌋

2) Nechť $U \subset X$ a $f(U) \cap f(X \setminus U) = \emptyset$.
Potom $f|_U : U \to f(U)$ je uzavřené.
Je-li $f|_U$ navíc prosté, potom $f|_U$ je homeomorfismus.

⌈Je-li $F \subset X$ uzavřená, potom
$$f(F \cap U) = \underbrace{f(F)}_{\text{uzavř.}} \cap f(U) \text{ je uzavřené v } f(U).$$ ⌋



Hom 2

DŮSLEDEK Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté spojité. Předpokládejme, že existuje spojité $\overline{\varphi} : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$, které rozšiřuje φ. Je-li $\overline{\varphi}(\partial G) \cap \varphi(G) = \emptyset$, potom $\varphi : G \xrightarrow{na} \varphi(G)$ je homeomorfismus.

[Máme, že $\overline{G}$ je kompakt a z 2.) je φ uzavřené.]

Pozn: Každá parametr. k-plocha $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je lokálně k-mapou, tzn. každý $u_0 \in U$ má okolí $U_0 \subset U$ takové, že $\varphi|U_0$ je k-mapa.

x

(i) Ex. okolí $V \subset U$ bodu u_0, že $\varphi|V$ je prosté, skutečně, protože $D\varphi(u_0)$ má hodnost k, existuje její čtvercová $k \times k$ podmatice, která je regulární. BÚNO: Předpokládejme, že

$$L := \left(\frac{\partial \varphi_i(u_0)}{\partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,k}$$

je regulární. Označme $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ projekci $\pi(x) := (x_1, \dots, x_k)$. Protože $D(\pi \circ \varphi)(u_0) = L$, z věty o inverzním zobrazení ex. okolí $V \subset U$ bodu u_0 tak, že $\pi \circ \varphi|_V$ je difeomorfismus, tudíž prosté. Proto je $\varphi|V$ prosté.

TLOM3

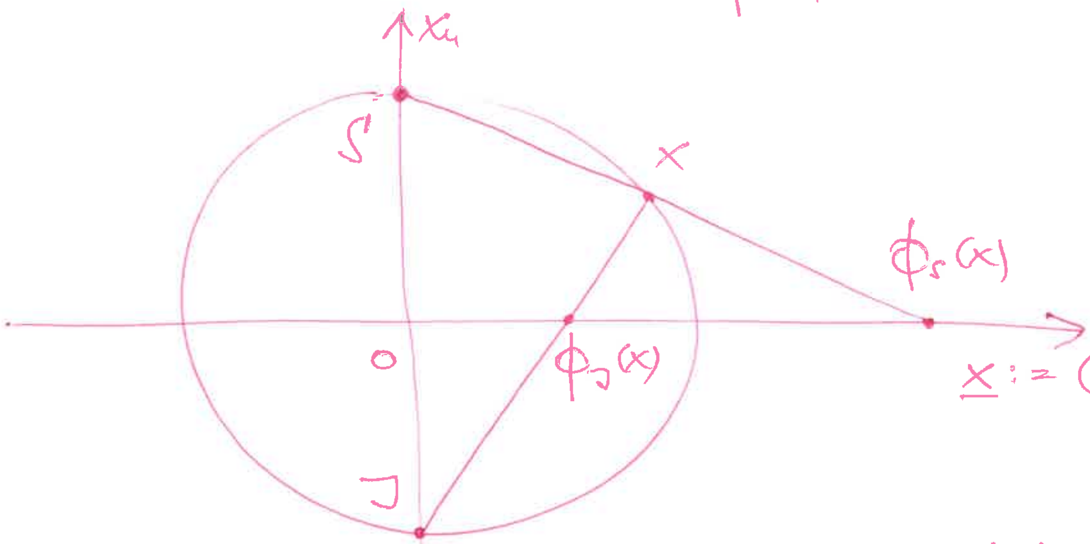
(ii) Volme omezené okolí U_0 bodu u_0 tak aby $\overline{U_0} \subset V$. Potom je $\varphi|\overline{U_0}$ homeomor-

kompakt

[illegible] a $\varphi|U_0$ je mapa. ∎

STEREOGRAFICKÁ PROJEKCE

Nechť $S^{n-1} := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$.



$\underline{x} := (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

Potom $\phi_S(x) := \frac{1}{1-x_n}\cdot \underline{x}$, $x\in S^{n-1}\setminus\{S\} =: U_S$, kde $S:=(0,\dots,0,1)$ je "severní pól" S^{n-1}.

Cv.

Snadno $\phi_S : U_S \xrightarrow{na} \mathbb{R}^{n-1}$ je prosté spojité a

$$\phi_S^{-1}(y) := \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1},\dots,\frac{2y_{n-1}}{\|y\|^2+1},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right),\ y\in\mathbb{R}^{n-1}$$

je tř. C^∞ a $\operatorname{rank}(D\phi_S^{-1}) = n-1$ na $\mathbb{R}^{n-1}$ *).

Tedy ϕ_S^{-1} je mapa na S^{n-1}.

*) zřejmě ϕ_S je tř. C^∞ dokonce na $\mathbb{R}^n\setminus\{x_n=1\}$ a $\phi_S\circ\phi_S^{-1} = id$ na $\mathbb{R}^{n-1}$. Tedy $\forall y\in\mathbb{R}^{n-1}$

$$D\phi_S(x)\circ \underbrace{D\phi_S^{-1}(y)}_{\text{prosté}} = id_{\mathbb{R}^{n-1}},\ \text{kde } x=\phi_S^{-1}(y).$$

Potom $\{\phi_S^{-1},\phi_J^{-1}\}$ je atlas S^{n-1}, je-li $J:=(0,0,\dots,0,-1)$ "jižní pól" S^{n-1}.

Cv. Ukažte, že $\phi_S(\phi_J^{-1}(y)) = \phi_J(\phi_S^{-1}(y))$ [SP2]

$$= \frac{y}{\|y\|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}.$$

Eukl. norma v $\mathbb{R}^{n-1}$

Pozn: (i) Pro $n=3$ v GA a UKA:

$$S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{C}P^1$$

Riemannova sféra | nevlastní bod | komplexní projektivní přímka

(ii) SP pro $n=3$ se užívají v kartografii pro vytváření map zemského povrchu. Mapy nezachovávají vzdálenosti, ale úhly ano. Tzn. SP nejsou izometrie, ale jsou konformní transformace.