Př. Ukažte, že

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \le 1\}$$

je těleso se skoro hladkou hranicí. Je-li ∂M orientovaná vnějším normálovým polem, spočtěte, že

$$I := \int_{\partial M} \underbrace{(x-y+z)\,dy\,dz + (y-z+x)\,dz\,dx + (z-x+y)\,dx\,dy}_{\omega :=}.$$

— x —

Uvažme lineární zobrazení $(u,v,w) = L(x,y,z)$,

$$u := x-y+z$$
$$v := y-z+x$$
$$w := z-x+y$$

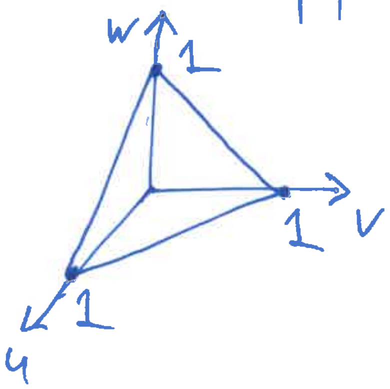
$$\det L = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1+}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = 4 \rightsquigarrow L : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^3 \text{ je}$$

izomorfismus a $L(M) = N := \underbrace{\{|u| + |v| + |w| \le 1\}}_{\text{osmistěn}}$

$$I \overset{\text{Gauss}}{=} \int_M d\omega = \int_M 3\,dx\,dy\,dz = 3\lambda^3(M) =$$

$$= 3 \cdot \det L^{-1} \cdot \lambda^3(N) = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \lambda^3(N_+), \text{ kde}$$

$N_+ := N \cap \{u,v,w \ge 0\}$. Protože $\lambda^3(N_+) =$



$$= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = \int_0^1 du\, \frac{(1-u)^2}{2} =$$

$$= \left[-\frac{(1-u)^3}{2\cdot 3}\right]_{u=0}^{1} = \frac{1}{6}, \text{ dostaneme}$$

$$\underline{\underline{I = 1}}.$$

VĚTA (Archimedes)

Uvažme horizontální radiální projekci

$$\pi(x,y,z) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$$

z $S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$ na válcovou plochu $V^2 := \{x^2+y^2=1,\ z\in(-1,1)\}$. Potom π zachovává plošnou míru, tzn. $\lambda_{V^2} = \lambda_{S^2}\pi^{-1}$.

DŮKAZ: Parametrizace S^2

$$\varphi:\ \begin{aligned} x &= \cos u\cdot\cos v \\ y &= \sin u\cdot \cos v \\ z &= \sin v \end{aligned}, \quad \underset{\substack{(-\pi,\pi) \\ \text{mapa}}}{u\in\mathbb{R}},\ v\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$g(u,v) := D\varphi^T D\varphi = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{DŘÍVE}$$

1\. fundament. forma

$$J\varphi = \sqrt{\det g} = \cos v$$

Parametrizace V^2: $\psi := \pi\circ\varphi$

$$\begin{aligned} x &= \cos u \\ y &= \sin u \\ z &= \sin v \end{aligned}, \quad \underset{\substack{(-\pi,\pi) \\ \text{mapa}}}{u\in\mathbb{R}},\ v\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$D\psi = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 v \end{pmatrix}$$

1\. fund. forma

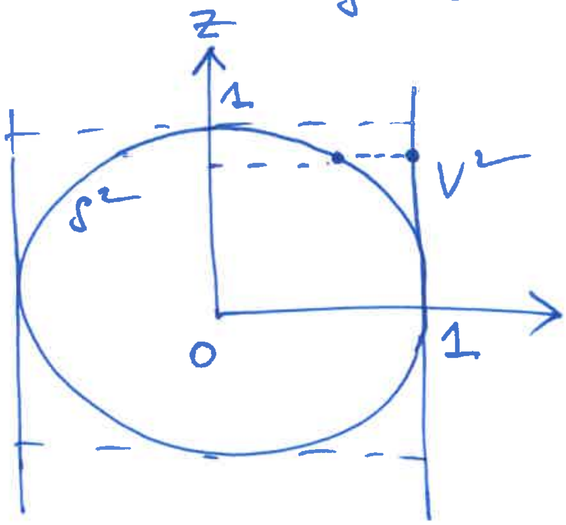
Arch2

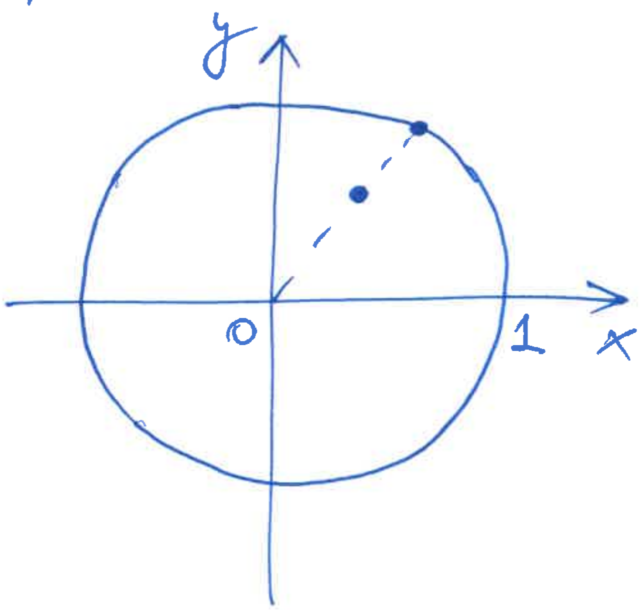
$$J\psi = \sqrt{\det \tilde{g}} = \cos v$$

Jeśli $B \in \mathcal{B}(V^2)$, potem

$$\lambda_{V^2}(B) = \int_{\psi^{-1}(B)} \cos v \, du\, dv = \int_{\varphi^{-1}(\pi^{-1}(B))} \cos v \, du\, dv$$

$$= \lambda_{S^2}(\pi^{-1}(B)). \qquad \blacksquare$$





Möbiův pásek $M \subset \mathbb{R}^3$ je neorientovatelná MP1

2-plocha, kde $M := \varphi\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \mathbb{R}\right)$, kde

$$\varphi: \begin{cases} x = \big(\overbrace{1 + u\cdot\cos\left(\tfrac{v}{2}\right)}^{A}\big)\cdot\cos v \\ y = \left(1 + u\cdot\cos\left(\tfrac{v}{2}\right)\right)\cdot\sin v \\ z = u\cdot\sin\left(\tfrac{v}{2}\right) \end{cases}, \quad u \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \ v \in \mathbb{R}$$

$(-\pi + v_0, v_0 + \pi)$ mapa

— x —

(i) $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(\cos\frac{v}{2}\cos v, \ \cos\frac{v}{2}\cdot\sin v, \ \sin\frac{v}{2}\right)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \Big(-\sin v\cdot A + \cos v\cdot B, \ \cos v\cdot A + \sin v\cdot B, \ \frac{u}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}\Big),$$ kde $B = \frac{\partial A}{\partial v} = -\frac{u}{2}\cdot\sin\frac{v}{2}$

$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2 = u^2\cdot\cos^2\left(\frac{v}{2}\right) + 2u\cos\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{u^2}{4} + 1 > 0$, tudíž rank $D\varphi = 2$

Maple $= \left(u\cdot\cos\frac{v}{2} + 1\right)^2 + \frac{u^2}{4}$

(ii) nepř. $\varphi_0 := \varphi|_{(-1/2, 1/2) \times (-\pi, \pi)}$ je mapa M

Skutečně, $v = \arg(x, y)$, kde $\arg: \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} \xrightarrow{\text{na}} (-\pi, \pi)$ je hlavní hodnota argumentu z UKA. Pro $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ je $r = 1 + u\cdot\cos\left(\frac{v}{2}\right)$, tudíž

$$u = \frac{r - 1}{\cos\frac{v}{2}}$$

(iii) M není orientovatelná

Sporem. Nechť ex. spojité normálové pole $\nu: M \to S^2$. Položme

$$\nu_0(X) := \frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v} \Big/ \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|,$$

$$X = \varphi(u,v)$$

$$(u,v)\in \underbrace{\left(-\tfrac12,\tfrac12\right)\times(-\pi,\pi)}_{\substack{\shortparallel \\ U_0}}.$$

Potom na $\varphi(U_0)$ buď $\nu=\nu_0$,
anebo $\nu=-\nu_0$. <u>BÚNO</u>: $\nu=\nu_0$.

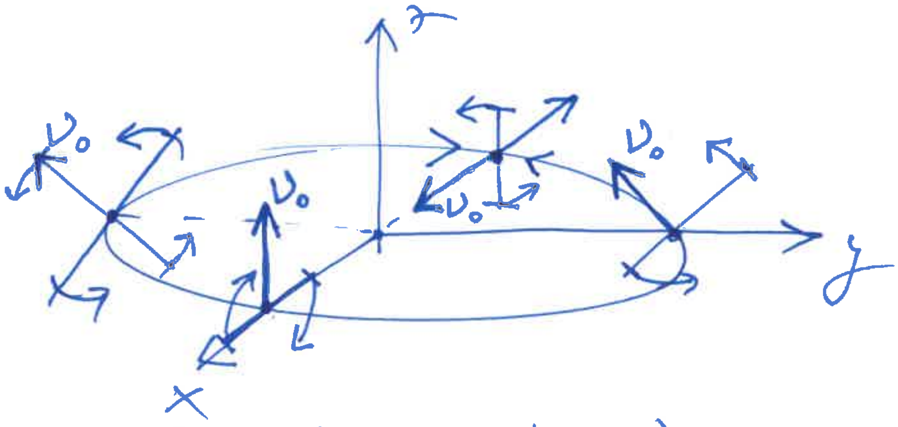
Zřejmě $X=(-1,0,0)$ pro $u=0$, $v=\pm\pi$ a

$$\nu(-1,0,0) = \lim_{v\to\pm\pi\mp} \nu_0(\varphi(0,v)) = \pm(1,0,0),$$

což je spor. ↯

Skutečně, pro $u=0$ je $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = (-\sin v, \cos v, 0)$

a $\nu_0 = \left(-\cos v\cdot \sin\frac{v}{2}, -\sin v\cdot \sin\frac{v}{2}, \cos\frac{v}{2}\right)$.



<u>Pozn</u>: (i) M má „jen jednu stranu". (ii) Co se stane, když M rozstřihneme v $1/2$, nebo v $1/3$?

Orientovaný atlas

OA 1

1. Mapy φ, ψ k-plochy S jsou shodně orient., tzn. $\tau_\varphi = \tau_\psi$ na $\langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle$, právě když $\det(D\phi) > 0$ na $Def(\phi)$, kde $\phi := \psi^{-1} \circ \varphi$ a $\tau_\varphi(x) := \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u) \Big/ \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u) \right\|$, je orientace $\langle\varphi\rangle$ indukovaná φ. $x = \varphi(u)$

Nechť $x \in \langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle$, $x = \varphi(u) = \psi(v)$. Potom $\tau_\varphi(x) = \tau_\psi(x)$, právě když

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u) \quad \text{a} \quad \frac{\partial\psi}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial v_k}(v) \qquad (*)$$

jsou souhlasně orientované báze T_xS.

Ale $\varphi = \psi \circ \phi$ a $D\varphi(u) = D\psi(v) \cdot D\phi(u)$, tudíž $D\phi(u)$ je matice přechodu mezi bázemi $(*)$ a tedy $\det(D\phi(u)) > 0$.

Pozn: "Orientace τ plochy S zadává orientaci každého T_xS spojitě pro $x \in S$."

OA2

(2) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá k-plocha a τ je orientace S! Potom ex. k-mapa φ taková, že $S = \langle \varphi \rangle$ a $\tau = \tau_\varphi$.

———— x ————

Nechť S je pouze souvislá a $S = \langle \varphi \rangle$, kde φ je k-mapa. Potom buď $\tau = \tau_\varphi$, nebo $\tau = -\tau_\varphi$.

Ve druhém případě místo φ vezmeme např.

(*) $\tilde{\varphi}(u_1, \dots, u_k) := \varphi(-u_1, u_2, \dots, u_k)$. Potom $\tau_{\tilde{\varphi}} = -\tau_\varphi = \tau$.

Pro obecnou S musíme popř. změnit mapu na každé komponentě S.

(3) (i) Nechť $\mathcal{A}$ je orientovaný atlas plochy S. Potom $\tau_{\mathcal{A}} := \tau_\varphi$ na $\langle \varphi \rangle$ pro každý $\varphi \in \mathcal{A}$ je orientace S indukovaná $\mathcal{A}$.

(ii) Nechť τ je orientace plochy S. Potom existuje orientovaný atlas $\mathcal{A}$ plochy S takový, že $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

Pozn: Zadat orientaci na ploše S znamená zadat na S orientovaný atlas.

ad (ii) Nechť $\tilde{\mathcal{A}}$ je atlas $\mathcal{S}$.

BÚNO: Předp., že každé $\varphi \in \tilde{\mathcal{A}}$ je definováno na oblasti. Jinak místo φ vezmeme restrikce φ na jednotlivé komponenty $\mathrm{Def}(\varphi)$. Pro každé $\varphi \in \tilde{\mathcal{A}}$ položme

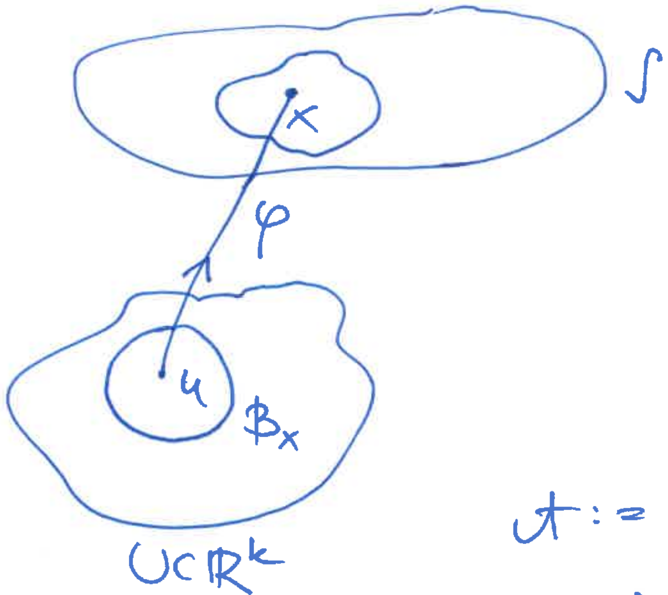
$$\bar{\varphi} := \varphi, \text{ je-li } \tau_\varphi = \tau \text{ na } \langle\varphi\rangle,$$
$$:= \tilde{\varphi}, \quad -\text{"}- \quad \tau_\varphi = -\tau \quad -\text{"}- .$$

Zde $\tilde{\varphi}$ je jako v (*). Potom

$\mathcal{A} := \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \tilde{\mathcal{A}}\}$ je orientovaný atlas $\mathcal{S}$ a $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

Př. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha. Je-li $B \subset S$ kompakt, potom $\lambda_S(B) < +\infty$.

(i) Nechť $x \in S$. Ex. k-mapa φ plochy S, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ tak, že $x = \varphi(u)$ pro nějaké $u \in U$. Ex. otevř. koule B_x kolem u takovou, že $\overline{B_x} \subset U$. Položme $\varphi_x := \varphi|B_x$. Potom



$\mathcal{A} := \{\varphi_x \mid x \in S\}$ je atlas S.

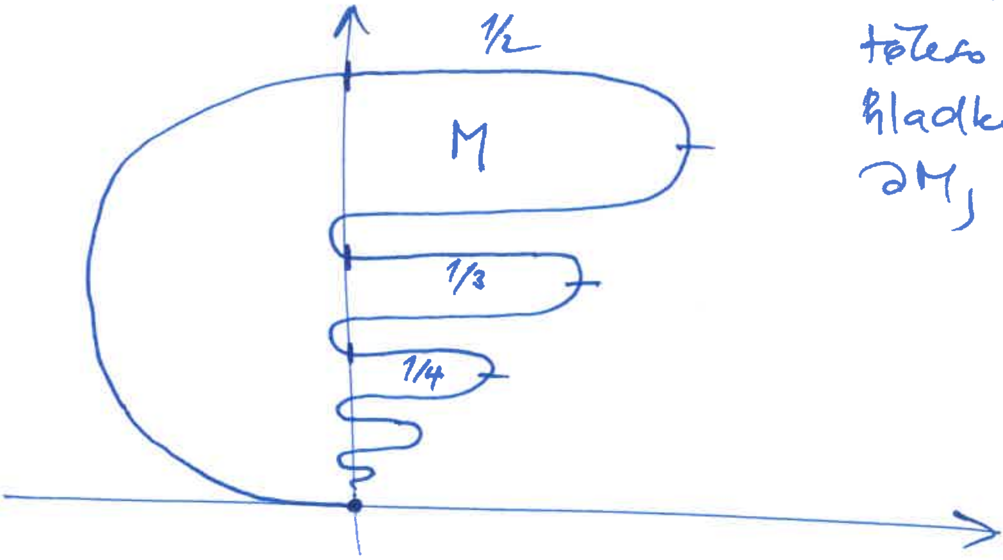
Pozn: Ukázali jsme, že každá plocha S má atlas $\mathcal{A}$ složený z map definovaných na otevř. koulích.

(ii) Protože $B \subset S$ je kompakt, existují konečné $\varphi_1, \dots, \varphi_l \in \mathcal{A}$ tak, že $B \subset \langle\varphi_1\rangle \cup \dots \cup \langle\varphi_l\rangle$. Potom $\lambda_S(B) \leq \lambda_S(\langle\varphi_1\rangle) + \dots + \lambda_S(\langle\varphi_l\rangle) < +\infty$, protože pro každou $\varphi_x \in \mathcal{A}$ platí

$$\lambda_S(\langle\varphi_x\rangle) = \int_{\underset{\text{kompakt}}{\overline{B_x}}} \underset{\text{spoj.}}{J\varphi} \, d\lambda^k < +\infty.$$

Pozn: Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní těleso s hladkou hranicí ∂M, potom ∂M je kompakt a plocha ∂M má tedy konečnou plošnou míru.

Př. Existuje kompaktní zobecněná k-plocha $S \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou je $\lambda_S(S) = +\infty$



$M \subset \mathbb{R}^2$ kompaktní těleso se skoro hladkou hranicí ∂M, $\lambda_{\partial M}(\partial M) = +\infty$