ST01

Stokesova věta

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $k = 1, \dots, n$, $c \in C_k(\Omega)$ (k-řetězec) a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$. Potom

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

$\boxed{k=1}$ Věta o potenciálu: Nechť $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$.
Potom $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$.
Je-li $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ hladká (tj. 1-dim. singul. krychle), pak

$$\int_\varphi df = \int_\varphi \nabla f \, d\vec{s} \underset{\substack{\text{věta} \\ \text{o potenc.}}}{=} f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = \int_{\partial \varphi} f$$

Skutečně, 0-dim. sing. krychle je bod z $\mathbb{R}^n$, tzn. $\mathcal{K} : I_0 := \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a $\int_{\mathcal{K}} f \overset{\text{def.}}{:=} f(\mathcal{K}(0))$. Ztotožňujeme $\mathcal{K}$ s $\mathcal{K}(0)$.

Potom $\partial\varphi = \varphi(1) - \varphi(0)$. Snadno i pro $c \in C_1(\Omega)$.

$\boxed{k=n}$ Gaussova věta o divergenci (i pro tělesa se (skoro) hladkou hranicí)

$$\int_{\partial c} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i \, d\hat{x}_i = \int_c \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$\boxed{n=2}$ $\boxed{k=2}$ Gauss, ekvivalentní

Greenova věta: $\displaystyle\int_{\partial C} F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 = \int_C \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)}_{\text{rot } F} dx_1\,dx_2$

$\boxed{n=3}$ $\boxed{k=2}$ Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$:

$$\int_{\partial C} F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + F_3\,dx_3 = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_{12} +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_{23} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_{31}$$

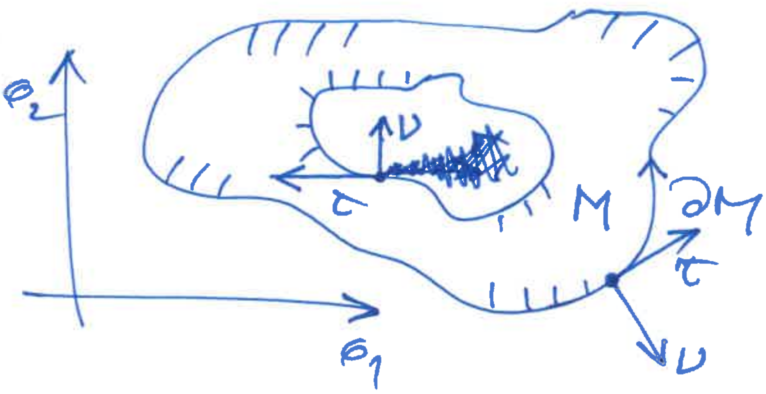
Greenova věta

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je těleso se (svou) hladkou hranicí ∂M. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní s ∂M má konečnou plošnou míru. Je-li ∂M orientována vnějším normál polem ν, potom

$$\int_{\partial M} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = \int_{\operatorname{int} M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 .$$

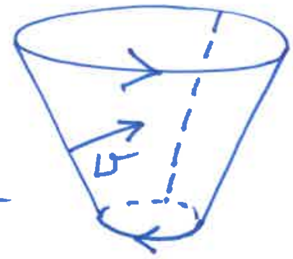
Orientace ∂M:

$\tau := * \nu$ je orientace ∂M indukovaná $\nu = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2$, tudíž $\tau = (-\nu_2, \nu_1) \in \mathbb{R}^2$ je tečný vektor k ∂M.



„když jdeme po ∂M v kladném směru, potom vnitřek M máme vždy po levé ruce."

Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$



Nechť $K := \{x^2+y^2=z^2,\ z\in[1,2]\}\subset\mathbb{R}^3$.

1) Potom $\operatorname{int}K := \{\ \text{—}\|\text{—}\ ,\ z\in(1,2)\}$ je 2-plocha a $\partial K := \{\ \text{—}\|\text{—}\ ,\ z\in\{1,2\}\}$ je 1-plocha.

Pozn: (i) $\operatorname{int}K$ a ∂K nejsou vnitřek a hranice K v nadrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$; ∂K nazýváme okrajem K

(ii) Lze vybudovat teorii k-ploch s okrajem v $\mathbb{R}^n$ a dokázat pro ně Stokesovu větu.

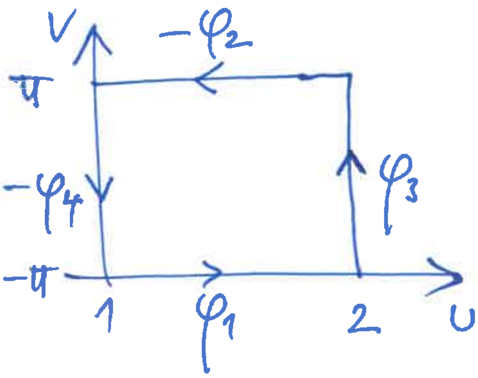
2) Ukažte, že

$$\int_{\operatorname{int}K} d\omega = \int_{\partial K}\omega$$

je-li $\omega\in\mathcal{E}^1(\Omega)$, kde $K\subset\Omega\subset\mathbb{R}^3$, a orientace $\operatorname{int}K$ a ∂K jsou 'kompatibilní' (Vysvětlete!).

$$\varphi:\ \begin{aligned} x&=u\cdot\cos v\\ y&=u\cdot\sin v,\\ z&=u\end{aligned}\qquad u\in[1,2],\ v\in[-\pi,\pi]$$

2-dim. sup. krychle, $\langle\varphi\rangle = K$



$\varphi_1(u) := \varphi(u,-\pi) = (-u,0,u),\ u\in[1,2]$

$\varphi_2(u) := \varphi(u,\pi) = (-u,0,u)$

$\varphi_3(v) := \varphi(2,v) = (2\cos v, 2\sin v, 2),\ v\in[-\pi,\pi]$

$\varphi_4(v) := \varphi(1,v) = (\cos v, \sin v, 1)$

$\partial\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4$

Ze Stokesovy věty pro rotační plochu

(1) $\displaystyle\int_{\varphi} d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega$

Zřejmě $\varphi|_{(1,2)\times(-\pi,\pi)}$ je mapa int K, viz dříve. Umluvme se int K orientovat indukovanou touto mapou*). Potom

(2) $\displaystyle\int_{\mathrm{int}\,K} d\omega = \int_{\varphi} d\omega$

Protože $\varphi_1 = \varphi_2$, dostaneme

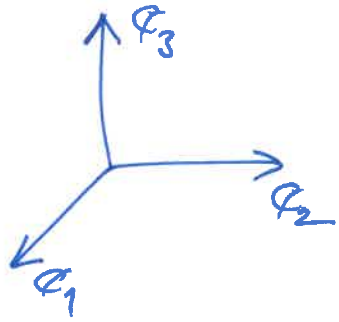
(3) $\displaystyle\int_{\partial\varphi} \omega = \int_{\varphi_3} \omega - \int_{\varphi_4} \omega = \int_{\partial K} \omega$, kde

$\partial K = \langle\varphi_3\rangle \cup \langle\varphi_4\rangle$ a (okrajová) kružnice $\langle\varphi_3\rangle$ je orientovaná souhlasně s φ_3 a $\langle\varphi_4\rangle$ opačně vůči φ_4.

*) Dříve jsme ukázali, že int K je orientována normálovým polem $\nu(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v, -\sin v, 1)$, které míří (dovnitř) kužele

Indukovaná orientace ∂K

„Pokud půjdu po okraji K v kladném směru a mé tělo bude mířit ve směru ν, tak int K budu mít po levé ruce."



5.2 (b) ověřte platnost Stokesovy věty přímým výpočtem:

$$c: \begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = s^2 + t^2 \\ z = s - t \\ w = s + t \end{cases}, \quad (s,t) \in [0,1]^2 \quad \text{a} \quad \omega = xy\,dy + zw\,dw \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^4)$$

2-dim sing. krychle v R^4

(1) $\int_c d\omega = \int_{[0,1]^2} c^*(d\omega) = \underline{\underline{4}}$, protože

$$c^*(d\omega) = \big(8ts(s^2+t^2) + (s+t)\cdot 2\big)\,ds\,dt = (8ts^3 + 8t^3 s + 2s + 2t)\,ds\,dt$$

$*\ 1+1+1+1$

$d\omega = y\,dx\,dy + w\,dz\,dw \ *$

$dx = 2s\,ds - 2t\,dt$

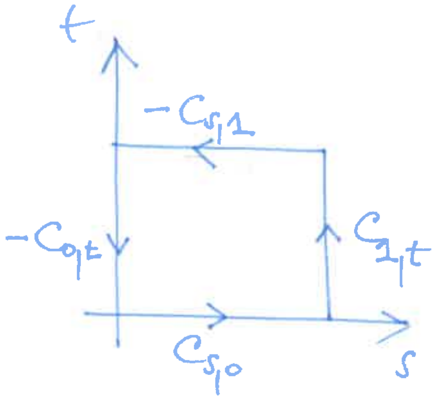
$dy = 2s\,ds + 2t\,dt$

$dz = ds - dt$

$dw = ds + dt$

$dx\,dy = 8ts\,ds\,dt$

$dz\,dw = 2\,ds\,dt$



(2) $\partial c = c_{s,0} - c_{s,1} - c_{0,t} + c_{1,t}$, kde

$c_{s,0}:\ x = s^2,\ y = s^2,\ z = s,\ w = s, \quad s \in [0,1]$

$c_{s,1}:\ x = s^2 - 1,\ y = s^2 + 1,\ z = s - 1,\ w = s + 1, \quad$ −||−

$c_{0,t}:\ x = -t^2,\ y = t^2,\ z = -t,\ w = t, \quad t \in [0,1]$

$c_{1,t}:\ x = 1 - t^2,\ y = 1 + t^2,\ z = 1 - t,\ w = 1 + t \quad$ −||−

$+)\ \int_{c_{s,0}} \omega = \int_0^1 \left(s^4 \cdot 2s\,ds + s^2\,ds\right) = \frac{2}{6} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$-)\ \int_{c_{s,1}} \omega = \int_0^1 (s^4 - 1)\cdot 2s\,ds + (s^2 - 1)\,ds = \frac{2}{6} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \underline{\underline{\frac{2}{3} - 2}}$

$-)\ \int_{c_{0,t}} \omega = \int_0^1 -t^4 \cdot 2t\,dt + (-t^2)\,dt = -\frac{2}{6} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

$+)\ \int_{c_{1,t}} \omega = \int_0^1 (1 - t^4)\,2t\,dt + \int_0^1 (1 - t^2)\,dt = \underline{\underline{2 - \frac{2}{3}}}$

$$\int_{\partial c} \omega = \underline{\underline{4}}$$