$\boxed{\text{Cíl}}$ Zavedeme přirozenou míru na k-dim. ploše S v $\mathbb{R}^n$, např. na jednotkové sféře S^2 v $\mathbb{R}^3$. [Na přednášce]

$\boxed{1.}$ Na $\mathbb{R}^k$ máme Lebesgueovu míru λ^k.

Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou vektory v $\mathbb{R}^k$ a

$$R := \{ t^1 v_1 + \dots + t^k v_k \mid t_j \in [0,1] \} \qquad (R)$$

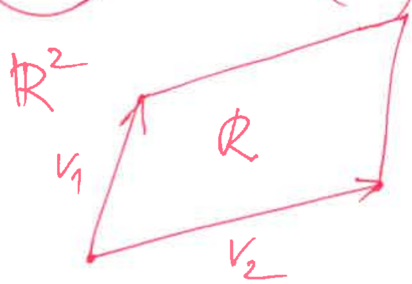
je rovnoběžnostěn určený těmito vektory.

Potom $R = L([0,1]^k)$, kde $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je lineární a $L = (v_1, \dots, v_k)$ matice $k \times k$.

Z věty o substituci z míry víme, že

$$\lambda^k(R) = |\det L| \, \underbrace{\lambda^k([0,1]^k)}_{= 1} = |\det L|$$

Př: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,



$$\lambda^2(R) = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| = 10$$

$\boxed{2.}$ Nechť V je reálný k-dimenzionální vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(i) Nechť $f_1, \dots, f_k$ je ortonormální (ON) báze V.

Pro $x = x^1 f_1 + \dots + x^k f_k \in V$ označme

$[x] = (x^1, \dots, x^k)^t \in \mathbb{R}^k$ jako souřadnice.

Potom $\phi : V \to \mathbb{R}^k$ definovaný jako $\phi(x) = [x]$

je izomorfismus zachovávající skalár. součin,

tzn. $\langle x, y \rangle = [x]^t \cdot [y] = \underbrace{x^1 y^1 + \dots + x^k y^k}_{\text{Euklid. skalární součin ve } \mathbb{R}^k}$

(ii) Je proto přirozené definovat Lebesg. míru λ_V na V jako

$$\lambda_V(B) := \lambda^k(\phi(B))$$

pro každou borelovskou $B \subset V$.

Cv. λ_V je míra a nezávisí na volbě ON-báze ve V

(iii) Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou vektory ve V.

Je-li R rovnoběžnostěn jako v (R), potom

$$\lambda_V(R) \overset{\boxed{1.}}{=} |\det \underbrace{([v_1], \dots, [v_k])}_{L :=}| = \sqrt{\det(L^T L)},$$

protože

$\det(L^T L) = (\det L)^2$ a $L^T L = ([v_i]^t \cdot [v_j])_{ij} =$

$= (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}$ je tzv. Gramova matice pro $v_1, \dots, v_k$.

$\boxed{\text{OB3}}$

afinní

$\boxed{3.}$ Nechť V je k-dimenz. vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$. Potom na V uvažujeme restrikci Euklid. skalár. součinu z $\mathbb{R}^n$ a definujeme míru λ_V na V jako v $\boxed{2.}$.

——— × ———

Nechť $v_1, \dots, v_k \in V$ a R je rovnoběžnostěn určený — ‖ —. Potom

$$\lambda_V(R) = \sqrt{\det(L^T L)},$$

kde $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $L = (v_1, \dots, v_k)$ a matice $n \times k$

$L^T L = (v_i^T \cdot v_j)_{ij}$ je $\underbrace{\text{Gramova matice}}_{k \times k}$ $v_1, \dots, v_k$.

Př. $\mathbb{R}^3$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L^T L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_V(R) = \sqrt{3}$$

Křivkový integrál (viz G1)

Nechť $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná křivka (v G1 jsou pro regulární a hladké).

C^1 C^∞

(1) Je-li $f : \langle\varphi\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, potom definujeme <u>křivkový integrál 1. druhu</u> jako

$$\int_\varphi f\,ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\,dt.$$

Eukl. norma v $\mathbb{R}^n$

Zde $\langle\varphi\rangle := \varphi([a,b])$ je graf φ.

<u>Pozn:</u> Význam:
- Pro $f \equiv 1$ dostaneme <u>délku</u> φ.
- Celková hmotnost drátu φ s danou lineární hustotou $f > 0$.

(2) Je-li $F : \langle\varphi\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spojité vektorové pole, potom definujeme <u>křivkový integrál 2. druhu</u> jako

$$\int_\varphi F\,d\vec{s} := \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\,dt =$$

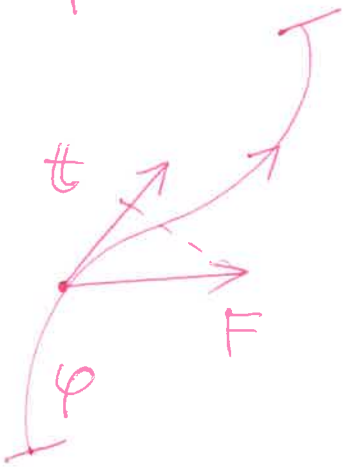
Eukl. skalární součin v $\mathbb{R}^n$

$$= \int_a^b \left(F_1(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \cdots + F_n(\varphi(t)) \cdot \varphi_n'(t) \right) dt$$

Pozn: (i) Jiné značení $\displaystyle\int_\varphi F_1\,dx_1+\dots+F_n\,dx_n$ PT2+

$x_i=\varphi_i(t)$
$dx_i=\varphi_i'(t)\,dt$

(ii) Nechť navíc φ je <u>regulární</u> (tzn. $\varphi'\neq 0$ na $[a,b]$) a φ je <u>homeomorfismus</u>*) $[a,b]$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom $\mathbb{t}(t):=\dfrac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ je <u>jednotkový tečný vektor</u> a pole $\mathbb{t}(x):=\mathbb{t}(\varphi^{-1}(x))$, $x\in\langle\varphi\rangle$ je spojité. Zřejmě máme následující rovnost



$$\int_\varphi F\,d\vec{s}=\int_\varphi \langle F,\mathbb{t}\rangle\,ds.$$

"tečná složka F"

(iii) Význam: Práce, kterou vykoná pole F podél φ.

Pozn: *) Protože $[a,b]$ je <u>kompakt</u>, stačí předpokládat, že φ je prostá. (viz první cvičení)

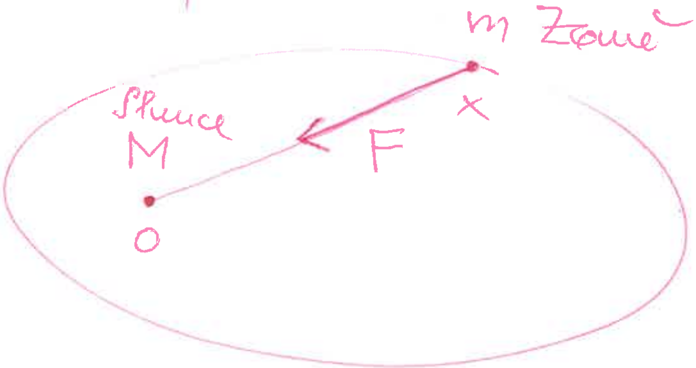
VĚTA O POTENCIÁLU * co se stihne

PT3

Př. Newton: Gravitační síla

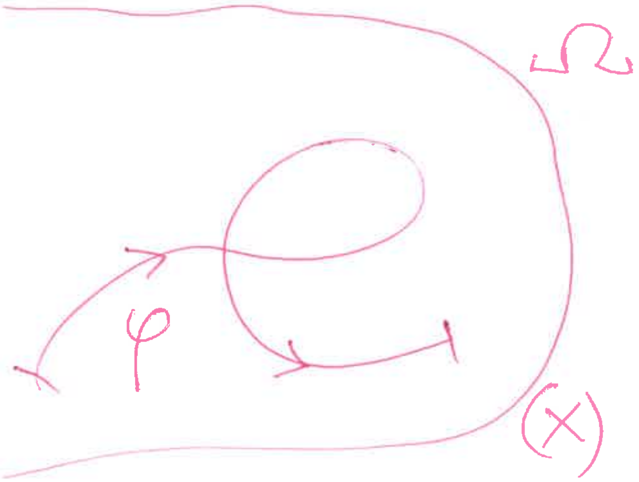
$$F := -\frac{GM\cdot m}{\|x\|^2}\cdot\frac{x}{\|x\|}, \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$$

má potenciál $U := -\dfrac{GMm}{\|x\|}$, tzn.



$$F=\nabla U.$$

Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená. Nechť spojitá $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ má potenciál $U:\Omega\to\mathbb{R}$, tzn. $F=\nabla U$ na Ω, kde $\nabla U := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. Je-li křivka $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ v Ω (tzn. $\langle\varphi\rangle\subset\Omega$), potom platí



$$(*)\quad \int_\varphi F\,d\vec{s} = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)).$$

Sledovně, $(U(\varphi(t)))' = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot \varphi_1'(t) + \dots$ PT4

$+ \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot \varphi_n'(t) = \langle \nabla U(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$, tudíž

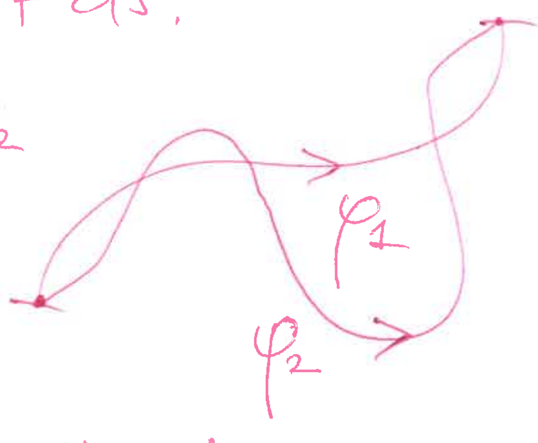
$$U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)) = \int_a^b (U(\varphi(t)))'\,dt = \int_\varphi \nabla U\, d\vec{s}.$$

Důsledky (*):

(c) Je-li φ uzavřená křivka v Ω (tzn. $\varphi(a)=\varphi(b)$), potom $\int_\varphi F\,d\vec{s} = 0.$

(a) $\int_\varphi F\,d\vec{s}$ nezávisí v Ω na cestě tzn. jsou-li $\varphi_1 : [a,b] \to \Omega$, $\varphi_2 : [c,d] \to \Omega$ křivky takové, že $\varphi_1(a) = \varphi_2(c)$ a $\varphi_1(b) = \varphi_2(d)$, potom

$$\int_{\varphi_1} F\,d\vec{s} = \int_{\varphi_2} F\,d\vec{s}.$$



Pozn: (*) zobecňuje Newtonův vzorec:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

PTJ

(T1) Nechť $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité.
NTJE (= následující tvrzení jsou ekvivalentní)
(P) F má na Ω potenciál;
(C) a (C').

(T2) Nechť $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je tř. C^1.
Má-li F na Ω potenciál, potom
(R) $$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ na } \Omega \quad \forall i \neq j$$
(tzn. $\operatorname{rot} F = 0$ pro $n = 2, 3$).
Obrácená implikace platí, je-li Ω konvexní (hvězdovitá / jednoduše souvislá) oblast v $\mathbb{R}^n$.

Pozn: (i) Důkaz $\boxed{\Rightarrow}$ je snadný, protože potenciál U je tř. C^2 a
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$
(ii) $\boxed{\Leftarrow}$ je speciální případ tzv. Poincarého lemmatu.

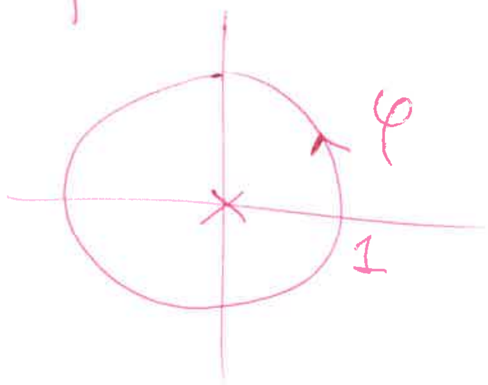
Pří $F(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, PTJ.3

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, splňuje (R), ale

nemá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ potenciál.

Skutečně, je-li $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

potom



$$\int_\varphi F\,d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (+\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0,$$

tudíž neplatí (c).

Hlavní myšlenky pro důkaz (T1), (T2)

PT6

Lze postupovat jako v UKA při důkazu existence primitivní funkce v $\mathbb{C}$.

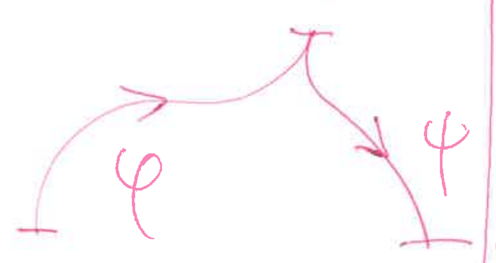
Lépe pracovat s křivkami $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, které jsou <u>po částech</u> <u>spojitě diferencovatelné</u>, tj. φ je spojitá na $[a,b]$ a ex. dělení $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ takové, že $\varphi|[t_i, t_{i+1})$ je spojitě diferenc. pro každé $i = 0, \dots, k-1$.

Př. 1) <u>Úsečka</u>: Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\varphi(t) := a + t \cdot (b-a), \quad t \in [0,1]$$

je <u>úsečka</u> z a do b. Značíme $[a;b]$.

2) Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ a $\psi : [\varepsilon, \delta] \to \mathbb{R}^n$ jsou <u>křivky</u>. Je-li $\varphi(\beta) = \psi(\varepsilon)$, potom definujeme



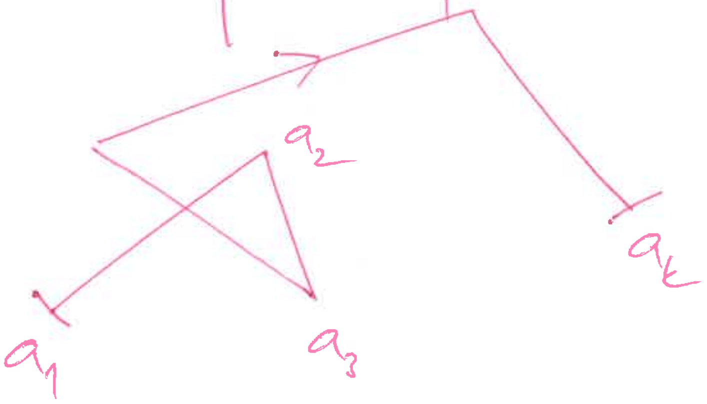
$$(\varphi \dotplus \psi)(t) := \varphi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$
$$:= \psi(t - \beta + \varepsilon), \quad t \in [\beta, \delta + \beta - \varepsilon];$$

a $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t), \quad t \in [-\beta, -\alpha]$.

PT7

3) φ je lomená čára v $\mathbb{R}^n$, ex-li $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ takové, že

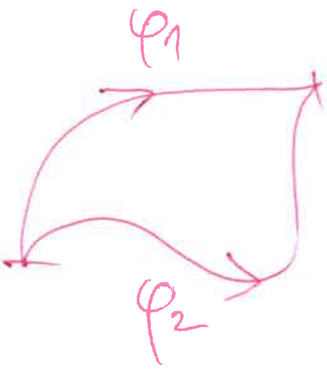
$$\varphi = [a_1,a_2] \dotplus [a_2,a_3] \dotplus \dots \dotplus [a_{k-1},a_k]$$



Důkaz (1):

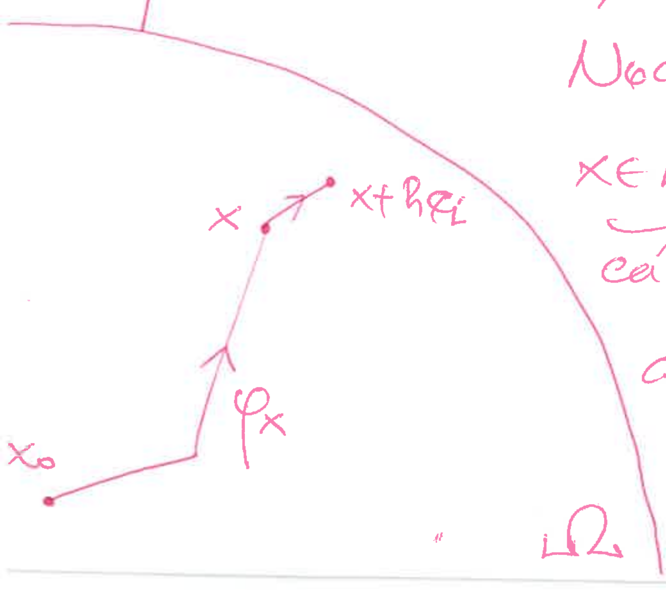
(C) $\Leftrightarrow$ (C'): zřejmé, $\varphi := \varphi_1 \dotplus (\dot{-}\varphi_2)$ je uzavřená a

$$\int_{\varphi} F = \int_{\varphi_1} F - \int_{\varphi_2} F.$$



Zbývá (C') $\Rightarrow$ (P): BÚNO: Ω je oblast. Nechť $x_0 \in \Omega$. Pro každé $x \in \Omega$ najdeme lomenou čáru φ_x v Ω z x_0 do x a definujeme

$$U(x) := \int_{\varphi_x} F \, d\vec{s}.$$



Nechť $x \in \Omega$ a $i = 1, \dots, n$. Potom

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = F_i(x).$$

Skutečně, pro malá $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ je

$$\frac{U(x+he_i) - U(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\varphi_x \dotplus [x; x+he_i]} F\, d\vec{s} - \int_{\varphi_x} F\, d\vec{s} \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{[x; x+he_i]} F\, d\vec{s} = \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{\langle F(x+te_i), e_i \rangle}_{= F_i(x+te_i)}\, dt$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} F_i(x) \text{ ze spojitosti } F_i \text{ v } x.$$

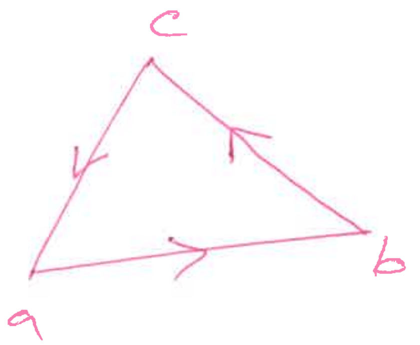
Zde e_i je i-tý bazový vektor z $\mathbb{R}^n$. ▨

DŮKAZ T2: (R) $\Rightarrow$ (P) pro $\boxed{n=2}$

(i) Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ je trojúhelník s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, pokud

$$\Delta := \underbrace{\{ \alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \}}_{\text{konvexní obal } a, b, c}$$

a značíme $\partial \Delta := [a; b] \dotplus [b; c] \dotplus [c; a]$.



(ii) Ukážeme, že (R) plyne | PT9

(Δ) $\int_{\partial\Delta} F\,d\vec{s} = 0$ pro každý trojúhelník $\Delta \subset \Omega$!

Skutečně, nechť Δ je nedegenerovaný trojúhelník v Ω a $\partial\Delta$ je kladně orientovaná (tzn. "proti směru hodinových ručiček"), jinak snadno.
Potom z Greenovy věty dostaneme

$$\int_{\partial\Delta} F\,d\vec{s} = \int_{\Delta} \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)}_{\substack{\| \\ \operatorname{rot} F \\ \| \ (R) \\ 0}} dx_1 dx_2 = 0,$$

je-li $\boxed{n=2}$. Pro obecné n musíme užít obecnější integrální větu.

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní. Potom (Δ) $\Rightarrow$ (P). Skutečně, nechť $x_0 \in \Omega$. Pro každé $x \in \Omega$ položme $\varphi_x := [x_0; x]$ a

$$U(x) := \int_{\varphi_x} F\,d\vec{s}.$$

PT 1.

Důkaz, že U je potenciální je analogický jako pro (C') $\Rightarrow$ (P), jen místo (C') užijeme (Δ). $\blacksquare$