Hlubší vlastnosti funkcí

Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,\ x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}},\ x \in \mathbb{R}$

   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q},\ x, y > 0,\ 1 < p, q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $\mathrm{e}^x > x + 1,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. Dokažte, že funkce
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce
   $$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = xe^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je d, je upevněna za konce nit délky l. Rozdíl výšek upevnění je h. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2},$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

13. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.