

8. domácí úkol z PDR2, termín 9.5. do 12:21.

Vem $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup N$ (kde N má nulovou $(d-1)$ -dimensionální míru a Γ_D a Γ_N jsou relativně otevřené v $\partial\Omega$), g měřitelnou funkci na Γ_N , $u_D \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ a funkci $F(x, p, \mathbf{q}) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ která splňuje

- $F(\cdot, p, \mathbf{q})$ je měřitelná $\forall (p, \mathbf{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,
- $F(x, \cdot, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ pro s.v. $x \in \Omega$,
- $\partial_p F \in \mathcal{C}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ a $\partial_{\mathbf{q}} F \in \mathcal{C}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

Buď $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $u|_{\Gamma_D} = u_D|_{\Gamma_D}$, minimizérem funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx + \int_{\Gamma_N} g u \, dS.$$

Pečlivě odvoďte odpovídající Euler-Lagrangeovy rovnice za předpokladu, že:

bud' a) $\operatorname{div}(\partial_p F(x, u(x), \nabla u(x))) \in \mathcal{C}(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}(\Gamma_N)$,

nebo b) $\operatorname{div}(\partial_p F(x, u(x), \nabla u(x))) \in L^1(\Omega)$, $g \in L^1(\Gamma_N)$.