

7. domácí úkol z PDR2, termín 25.4. do 12:21.

Zvolte si jeden ze dvou příkladů:

I. Na oblasti (definované pomocí polárních souřadnic, pro dané $\alpha > 0$)

$$\Omega_\alpha := \{(r, \varphi) : r \in (0, 1), \varphi \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})\}$$

uvažujte funkci ($u(x, y) := \tilde{u}(r, \varphi)$)

$$\tilde{u}(r, \varphi) := r^{\pi/\alpha} \cos(\frac{\pi}{\alpha}\varphi).$$

Ukažte, že $u(x, y)$ je slabým řešením Laplaceovy rovnice s nějakými (kultivovanými) okrajovými podmínkami (tip: vzpomeňte si na holomorfní funkce) a ukažte pro jaká α (ne)platí $u \in W^{2,2}(\Omega_\alpha)$.

II. Na oblasti

$$\Omega_\alpha := \{(r, \varphi), r \in (0, 1), \varphi \in (0, \pi)\}$$

uvažujte funkci

$$u(r, \varphi) := r^{1/2} \sin(\varphi/2).$$

Ta je opět slabým řešením Laplaceovy rovnice (v x, y) například s pěknou Dirichletovou okrajovou podmínkou na $r = 1$ a na $\varphi = 0$ a s Neumannovou na $\varphi = \pi$. Ani zde ale u není z $W^{2,2}(\Omega_\alpha)$.