Matematické programování
Petr Lachout

- pracovní text k přednášce „ EKN012 Optimalizace I“

16.října 2011

Obsah

Ve skriptech je použito následující označení:

$\mathbb{R}$ .... reálná čísla
$\mathbb{R}^*$ .... rozšířená reálná čísla
$\mathbb{N}$ .... přirozená čísla
$\mathbb{Z}$ .... celá čísla
$\mathrm{clo}\,(A)$ .... uzávěr množiny A
$\mathrm{int}\,(A)$ .... vnitřek množiny A
$\mathrm{rint}\,(A)$ .... relativní vnitřek množiny A
$\partial\,(A)$ .... hranice množiny A
$\mathsf{e}_{i:n},\ i = 1, 2, \ldots, n$ .... jednotkové vektory v $\mathbb{R}^n$

Kapitola 0

Úvod

V přednášce se budeme zabývat metodikou hledání řešení optimalizační úlohy

$$\min\{f(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

kde $f : X \to \mathbb{R}$ a $X \subset \mathbb{R}^n$.

Není to na úkor obecnosti. Pokud je studovaný problém formulován jako úloha na maximalizaci, pak je jednoduché ji převést na úlohu s minimalizací. Stačí si pouze uvědomit, že

$$\max\{f(x) : x \in X\} = -\min\{-f(x) : x \in X\}, \tag{2}$$

$$\operatorname{argmax}\{f(x) : x \in X\} = \operatorname{argmin}\{-f(x) : x \in X\}. \tag{3}$$

Pro úplnost uveďme definice lokálního a globálního minima a maxima.

Definice 0.1 *Budeme říkat, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $x \in X$*

i) *lokální minimum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in X$, $\|y - x\| < \delta$ platí $f(x) \le f(y)$.*

ii) *ostré lokální minimum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in X$, $0 < \|y - x\| < \delta$ platí $f(x) < f(y)$.*

iii) *globální minimum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $y \in X$ platí $f(x) \le f(y)$.*

iv) *ostré globální minimum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $y \in X$, $y \ne x$ platí $f(x) < f(y)$.*

Definice 0.2 *Budeme říkat, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $x \in X$*

i) *lokální maximum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in X$, $\|y - x\| < \delta$ platí $f(x) \ge f(y)$.*

ii) *ostré lokální maximum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in X$, $0 < \|y - x\| < \delta$ platí $f(x) > f(y)$.*

iii) *globální maximum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $y \in X$ platí $f(x) \ge f(y)$.*

iv) *ostré globální maximum na $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $y \in X$, $y \ne x$ platí $f(x) > f(y)$.*

Cvičení 0.3: Optimální využití dopravních prostředků.
Z daného místa je zboží přepravováno po třech trasách, přičemž v průběhu roku má být po trase 1 přepraveno $780\,t$, po trase 2 $425\,t$, po trase 3 $1000\,t$ zboží. K přepravě lze využít tři nákladní auto o nosnostech $1,5\,t$, $3,5\,t$ a $5\,t$. Nákladní auta o nosnostech $1,5\,t$ a $3,5\,t$ mohou během roku absolvovat nejvýše 250 jízd. Nákladní auto o nosnosti $5\,t$ smí během roku absolvovat nejvýše 200 jízd. V tabulce jsou uvedeny náklady na jednu jízdu daným nákladním automobilem po dané trase.

	1,5 t	3,5 t	5 t
Trasa 1	35	65	85
Trasa 2	60	90	110
Trasa 3	25	33	40

Úlohou je naplánovat přepravu tak, aby byla splněna omezení na přepravu a aby celkové náklady byly minimální.

Formulujte jako úlohu lineárního programování, tj. tak, aby minimalizovaná funkce i všechny funkce definující omezení byly lineární.

△

Cvičení 0.4: Optimální obsazení směn.
Uvažujme výrobní linku s nepřetržitým směnným provozem. Pracovní den je rozdělen na 4 směny po 6 hodinách. Minimální počet pracovníků potřebný pro práci v jednotlivých směnách je pořadě 4, 8, 8, 6 pracovníků. Každý pracovník pracuje 2 směny za sebou a nesmí být znovu zařazen v následujícím pracovním dnu.

S jakým minimálním počtem pracovníků lze směny požadovaným způsobem obsadit?

Formulujte jako úlohu lineárního programování, tj. tak, aby minimalizovaná funkce i všechny funkce definující omezení byly lineární.

△

Cvičení 0.5: Racionální využití skladu.
Ve skladu o celkové kapacitě C je na začátku sledovaného období uskladněno množství A nějaké neomezeně dělitelné komodity, např. uhlí, písku, rudy, atd. Naším úkolem je naplánovat optimálně využití skladu po n po sobě jdoucích období tak, aby zisk z provozu skladu byl maximální. Přičemž, x_i je množství komodity prodané během i-tého období za jednotkovou cenu b_i. Řídícími proměnnými jsou y_i označující rozhodnutí kolik komodity se dokoupí na konci i-tého období za jednotkovou cenu c_i.

△

Cvičení 0.6: L_1-regrese.
Uvažujme úlohu proložit přímku danými body v rovině tak, aby součet absolutních hodnot odchylek na y-nové ose byl minimální. Tj. úlohu

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} |y_i - a - bx_i| \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Formulujte jako úlohu lineárního programování, tj. tak, aby všechny funkce vystupující v úloze byly lineární.

△

Cvičení 0.7: Optimální osevní plán.
Zemědělský závod má pozemky P_1, P_2, …, P_m o rozlohách r_1, r_2, …, r_m hektarů a pěstuje kultury K_1, K_2, …, K_m. Očekávaný výnos z jednoho hektaru kultury K_j na pozemku P_i je Kč $c_{i,j}$.

Úkolem je sestavit pro tento zemědělský podnik osevní plán tak, aby očekávaný výnos byl maximální.

Formulujte jako úlohu lineárního programování, tj. tak, aby minimalizovaná funkce i všechny funkce definující omezení byly lineární.

△

Kapitola 1

Teorie lineárního programování

V této kapitole budeme používat vektory, matice a jejich podvektory a podmatice. Dohodněme si proto předem vhodné způsoby označení.

Uvažujme obecné konečné indexové množiny I, J.

- Vektorem rozumíme sloupcový vektor $a = (a_i,\ i \in I) \in \mathbb{R}^I$ a pro $S \subset I$ budeme označovat jeho podvektor $a_S := (a_i,\ i \in S) \in \mathbb{R}^S$.
- Maticí rozumíme $A = (A_{i,j},\ i \in I,\ j \in J) \in \mathbb{R}^{I\times J}$, kde první index označuje řádek a druhý sloupec, a pro $S \subset I$, $T \subset J$ její podmatici $A_{S\times T} := (A_{i,j},\ i \in S,\ j \in T) \in \mathbb{R}^{S\times T}$.
- Pokud $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, pak budeme $\mathbb{R}^J$ a $\mathbb{R}^{I\times J}$ zkracovat na $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{m\times n}$.
- Pro $x \in \mathbb{R}^I$ zavedeme množinu nulových souřadnic $\mathcal{N}(x) = \{i \in I : x_i = 0\}$, množinu kladných souřadnic $\mathcal{P}(x) = \{i \in I : x_i > 0\}$ a množinu záporných souřadnic $\mathcal{Z}(x) = \{i \in I : x_i < 0\}$.

1.1 Formulace a zápis úlohy

V této kapitole se budeme zabývat úlohami lineárního programování (LP)

$$\min\left\{c^\top x : A_{I_1\times J}x \geq b_{I_1},\ A_{I_2\times J}x \leq b_{I_2},\ A_{I_3\times J}x = b_{I_3},\ x_{J_1} \geq \mathbf{0},\ x_{J_2} \leq \mathbf{0},\ x_{J_3} \in \mathbb{R}^{J_3}\right\}, \tag{1.1}$$

$$\max\left\{c^\top x : A_{I_1\times J}x \geq b_{I_1},\ A_{I_2\times J}x \leq b_{I_2},\ A_{I_3\times J}x = b_{I_3},\ x_{J_1} \geq \mathbf{0},\ x_{J_2} \leq \mathbf{0},\ x_{J_3} \in \mathbb{R}^{J_3}\right\}, \tag{1.2}$$

kde $c \in \mathbb{R}^J$, $b \in \mathbb{R}^I$, $A \in \mathbb{R}^{I\times J}$, $\operatorname{card}(I) = m$, $I_1, I_2, I_3 \subset I$ jsou disjunktní a $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$, $\operatorname{card}(J) = n$, $J_1, J_2, J_3 \subset J$ jsou disjunktní a $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J$.

Úlohu můžeme rozepsat do jednotlivých složek

$$\begin{aligned}
\text{minimalizovat (nebo maximalizovat)} \quad & \sum_{j\in J} c_j x_j \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j\in J} A_{i,j}x_j \geq b_i,\ \text{ pro každé } i \in I_1, \\
& \sum_{j\in J} A_{i,j}x_j \leq b_i,\ \text{ pro každé } i \in I_2,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j = b_i, \text{ pro každé } i \in I_3,$$
$$x_j \geq 0, \text{ pro každé } j \in J_1,$$
$$x_j \leq 0, \text{ pro každé } j \in J_2,$$
$$x \in \mathbb{R}^J.$$

Budeme říkat, že úloha lineární programování je ve

- standardním tvaru, jestliže $I_1 = \emptyset$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$, $J_3 = \emptyset$;
- tvaru nerovností, jestliže buď $I_2 = \emptyset$, $I_3 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$, $J_3 = \emptyset$ nebo $I_1 = \emptyset$, $I_3 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$, $J_3 = \emptyset$;
- smíšeném tvaru v ostatních případech.

V úloze lineárního programování lze jednoduchými transformacemi převádět rovnosti na nerovnosti, nerovnosti na rovnosti, nezápornost proměnných na nekladnost, atd. Těmito transformacemi jsou

- Vynásobením koeficientů v účelové funkci -1, lze změnit minimalizaci na maximalizaci a opačně.
- Vynásobením nerovnosti koeficientem -1, lze „ otáčet“ nerovnosti.
- Vynásobením proměnné -1, lze nekladnost proměnných měnit na nezápornost a opačně.
- Nerovnost $\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j \geq b_i$ změníme na rovnost zavedením skluzové proměnné
$$\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j - v = b_i, \quad v \geq \mathbf{0}.$$
V účelové funkci této nové proměnné přiřadíme nulový koeficient.
- Nerovnost $\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j \leq b_i$ změníme na rovnost zavedením skluzové proměnné
$$\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j + v = b_i, \quad v \geq \mathbf{0}.$$
V účelové funkci této nové proměnné přiřadíme nulový koeficient.
- Rovnost $\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j = b_i$ lze ekvivalentně vyjádřit jako dvě nerovnosti
$$\sum_{j\in J} A_{i,j}x_j \geq b_i, \quad \sum_{j\in J} A_{i,j}x_j \leq b_i,$$
které musí být splněny současně.
- Každou proměnnou x_j pro $j \in J_3$ můžeme zaměnit rozdílem dvou nezáporných proměnných
$$x_j = w^+ - w^-, \ w^+ \geq 0, \ w^- \geq 0.$$
- Všechny uvedené transformace lze použít také obráceně. Je však třeba dát pozor, aby šlo opravdu o inverzní operaci !

Pomocí těchto transformací lze převádět jednotlivé typy úlohy lineárního programování jeden na druhý.

Definice 1.1 *Množinu*

$$\mathbf{M} := \left\{x \,:\, A_{I_1\times J}x \geq b_{I_1}, \ A_{I_2\times J}x \leq b_{I_2}, \ A_{I_3\times J}x = b_{I_3}, \ x_{J_1} \geq \mathbf{0}, \ x_{J_2} \leq \mathbf{0}, x \in \mathbb{R}^J\right\} \tag{1.3}$$

budeme nazývat množinou přípustných řešení úlohy (1.1).

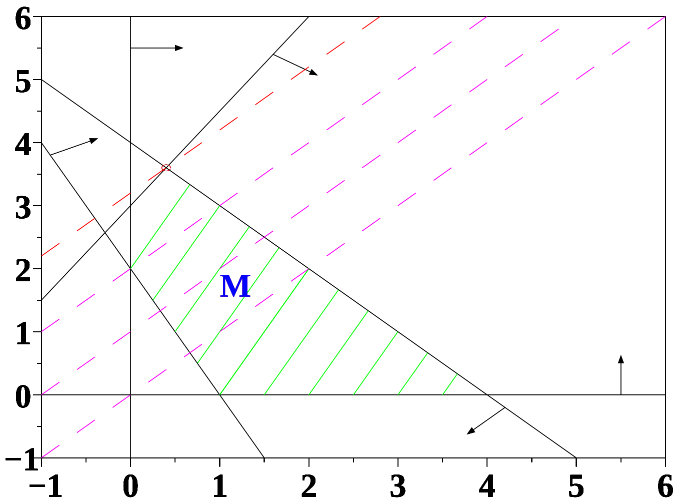
1.2 Grafické řešení úlohy lineárního programování

Příklad 1.2: Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimalizovat} & x_1 - x_2, & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 + x_2 & \geq & 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\ & x_1 + x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

Množina přípustných řešení je množina

$$\mathbf{M} = \left\{ (x_1, x_2) \,:\, 2x_1 + x_2 \geq 2,\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6,\ x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}.$$



Obrázek 1.1: Množina M z příkladu 1.2

Jedná se o konvexní pětiúhelník s vrcholy $\binom{1}{0}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{\frac{2}{5}}{\frac{18}{5}}$, $\binom{0}{3}$, $\binom{0}{2}$; viz obrázek č.1.1.

Vyneseme-li si rovnoběžky $x_1 - x_2 = k$ pro $k = 0, -1, -2$, zjistíme, že funkce $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ nabývá svého minima na množině $\mathbf{M}$ v bodě $\binom{\frac{2}{5}}{\frac{18}{5}}$.

Optimální řešení dané úlohy je tedy $\hat{x}_1 = \frac{2}{5}$, $\hat{x}_2 = \frac{18}{5}$ a optimální hodnota účelové funkce je

$$\hat{x}_1 - \hat{x}_2 = \frac{2}{5} - \frac{18}{5} = -\frac{16}{5}.$$

$\triangle$

Příklad 1.3: Uvažujme úlohu

$$
\begin{array}{lrcr}
\text{minimalizovat} & x_1 - x_2, & & \\
\text{za podmínek} & 2x_1 + x_2 & \geq & 2, \\
 & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\
 & x_1 + x_2 & \leq & -1, \\
 & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Množina přípustných řešení je množina

$$\mathbf{M} = \{(x_1, x_2) \,:\, 2x_1 + x_2 \geq 2, \; -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \; x_1 + x_2 \leq -1, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0\} = \emptyset.$$

Úloha tedy nemá žádné přípustné řešení a tím pádem nemá ani žádné optimální řešení.

△

Příklad 1.4: Uvažujme úlohu

$$
\begin{array}{lrcr}
\text{minimalizovat} & x_1 - x_2, & & \\
\text{za podmínek} & 2x_1 + x_2 & \geq & 2, \\
 & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\
 & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Množina přípustných řešení

$$\mathbf{M} = \{(x_1, x_2) \,:\, 2x_1 + x_2 \geq 2, \; -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0\}$$

je neomezená. Všechny rovnoběžky $x_1 - x_2 = k$ pro $k = 1, -1, -2, -3, \ldots$ mají s $\mathbf{M}$ neprázdný průnik. To znamená, že funkční hodnoty účelové funkce na $\mathbf{M}$ neomezeně klesají. Proto úloha nemá optimální řešení.

△

Příklad 1.5: Uvažujme úlohu

$$
\begin{array}{lrcr}
\text{minimalizovat} & 2x_1 - x_2, & & \\
\text{za podmínek} & 2x_1 + x_2 & \geq & 2, \\
 & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\
 & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Víme, že množina přípustných řešení

$$\mathbf{M} = \{(x_1, x_2) \,:\, 2x_1 + x_2 \geq 2, \; -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0\}$$

je neomezená. Z obrázku pak zjistíme, že úloha má optimální řešení $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = 3$ a optimální hodnota účelové funkce -3.

△

Příklad 1.6: Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimalizovat} & 3x_1 - 2x_2, & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 + x_2 & \geq & 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

Z grafického znázornění úlohy zjistíme, že optimální hodnota účelové funkce -6 a nabývá se jí ve všech bodech tvaru $\hat{x}_1 = \frac{2}{5}\lambda$, $\hat{x}_2 = 3 + \frac{3}{5}\lambda$ pro $\lambda \geq 0$.

△

Příklad 1.7: Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimalizovat} & 3x_1 - 2x_2, & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 + x_2 & \geq & 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\ & x_1 + x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

Z grafického znázornění úlohy zjistíme, že optimální hodnota účelové funkce -6 a nabývá se jí ve všech bodech tvaru $\hat{x}_1 = \frac{2}{5}\lambda$, $\hat{x}_2 = 3 + \frac{3}{5}\lambda$ pro $0 \leq \lambda \leq 1$.

△

Cvičení 1.8: Optimální výrobní plán.
Podnik vyrábí dva výrobky, označme je A, B, které musí projít zpracováním na čtyřech strojích, očíslujme je I, II, III, IV. Doba potřebná k opracování výrobků a kapacita strojů jsou uvedeny ve vhodných časových jednotkách v následující tabulce:

	I	II	III	IV
A	2	4	3	1
B	$\frac{1}{4}$	2	1	4
Kapacita	45	100	300	50

Prodejní cena hotového výrobku A je Kč 60 a hotového výrobku B Kč 40.

V jaké poměru je třeba vyrábět dané výrobky, aby celková produkce měla maximální prodejní cenu? Řešte graficky.

△

Cvičení 1.9: Řešte graficky úlohu

$$\begin{array}{lrcl} \text{maximalizovat} & 45x_1 + 30x_2\,, & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 + 10x_2 & \geq & 60\,, \\ & 6x_1 + 6x_2 & \leq & 60\,, \\ & 10x_1 + 5x_2 & \leq & 85\,, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

△

1.3 Farkasova věta

Množina všech přípustných řešení úlohy (1.1) může být prázdná, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.10: Uvažujme úlohu

$$\min \{2x_1 + x_2 - 3x_4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\}.$$

Množinou přípustných řešení pro tuto úlohu je

$$\mathbf{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\right\}.$$

Proměnné x_3 a x_4 můžeme vyjádřit z ostatních

$$\mathbf{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 1,\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, x_3 = 1 - x_1 - x_2,\ x_4 = 2x_1 + 3x_2 - 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Stačí tedy uvažovat pouze průmět do roviny x_1 a x_2.

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + x_2 \leq 1,\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}.$$

Tato množina je však prázdná.
Tudíž $\mathbf{M} = \emptyset$.

△

Nutnou a postačující podmínku k tomu, aby množina přípustných řešení byla neprázdná, představuje následující věta.

Věta 1.11 (Farkasova věta): *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice a $b \in \mathbb{R}^m$ je vektor. Pak má soustava $Ax = b$ nezáporné řešení tehdy a jen tehdy, když pro všechna $u \in \mathbb{R}^m$ splňující podmínku $A^\top u \geq \mathbf{0}$ platí $b^\top u \geq \mathbf{0}$.*

Důkaz: Označme $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ a $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Nutnost.

   Když $x \geq \mathbf{0}$, $Ax = b$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A^\top u \geq \mathbf{0}$, pak platí $b^\top u = x^\top A^\top u \geq \mathbf{0}$.

2. Postačitelnost.

   Předpokládejme, že soustava $Ax = b$ nemá nezáporné řešení a podmínka platí.

   Pak b nepatří do konvexního polyedrického kužele generovaného sloupci matice A, tj.
   $b \notin K := \operatorname{pos}\left(A_{I\times\{1\}}, A_{I\times\{2\}}, \ldots, A_{I\times\{n\}}\right)$, kde $A_{I\times\{1\}}, A_{I\times\{2\}}, \ldots, A_{I\times\{n\}}$ jsou sloupce matice A.

   K je neprázdná konvexní uzavřená množina a tak jsou splněny předpoklady věty 3.3. Podle ní existuje $u \in \mathbb{R}^m$, $u \neq 0$ tak, že $u^\top b < \inf\left\{u^\top y \,:\, y \in K\right\}$.

   Pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ a $\lambda \geq 0$ je $\lambda A_{I\times\{j\}} \in K$ a proto $u^\top b < \lambda u^\top A_{I\times\{j\}}$.

   Odtud pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí $u^\top b < 0 \leq u^\top A_{I\times\{j\}}$.

   Což jinými slovy znamená $b^\top u < 0$ a $A^\top u \geq \mathbf{0}$.

   Tím jsme se dostali do sporu s podmínkou a tak nezáporné řešení musí existovat.

Q.E.D.

Tvrzení Farkasovy věty je názorné. Buď má soustava $Ax = b$ nezáporné řešení, nebo lze nalézt takovou lineární kombinaci rovnic soustavy, že na levé straně vznikne lineární forma s nezápornými koeficienty a na pravé straně záporné číslo.

Příklad 1.12: Uvažujme soustavu z příkladu 1.10

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 6. \end{array}$$

Vynásobíme-li první rovnici třemi a odečteme-li od ní druhou rovnici, dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Tudíž vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ porušuje podmínku z Farkasovy věty, věta 1.11.

Soustava proto nemá nezáporné řešení.

△

Samotná Farkasova věta však ještě neřeší otázku existence optimálního řešení úlohy (1.1). Snadno zkonstruujeme příklad, kdy je množina přípustných řešení neprázdná, ale optimální řešení úlohy neexistuje.

Příklad 1.13: Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{minimalizovat} & -x_1 & - & x_2, & & & & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -2, \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -1, \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.} \end{array}$$

Úlohu můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{minimalizovat} & -x_1 & - & x_2, & & & & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & -2, & & & & \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & -1, & & & & \\ & x_3 & = & 2 & + & 2x_1 & - & x_2, & & \\ & x_4 & = & 1 & - & x_1 & + & 2x_2, & & \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array}$$

Proměnné x_3 a x_4 jsou jednoznačně vyjádřené pomocí x_1 a x_2 a jejich nezápornost vychází automaticky. Můžeme je proto v tuto chvíli zapomenout a řešit úlohu pouze s dvěma proměnnými.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{minimalizovat} & -x_1 & - & x_2, & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & -2, \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & -1, \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array}$$

Množina přípustných řešení této úlohy je neomezená a účelová funkce na ní neomezeně klesá. Úloha nemá optimální řešení.

△

Jiná účelová funkce však na stejné množině svého optima nabývá.

Příklad 1.14: Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{minimalizovat} & 3x_1 & - & x_2, & & & & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -2, \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -1, \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.} \end{array}$$

Z podmínek sestavíme novou rovnici. První rovnici vynásobíme $\frac{5}{3}$, druhou $\frac{1}{3}$ a sečteme je. Dostáváme rovnici

$$3x_1 - x_2 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{11}{3}.$$

Z nezápornosti proměnných x_3 a x_4 zjišťujeme, že na množině přípustných řešení je $3x_1 - x_2 \geq -\frac{11}{3}$.

Obdobným postupem jako v příkladě 1.13 přejdeme k úloze

$$\begin{array}{lcccccc} \text{minimalizovat} & 3x_1 & - & x_2, & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & -2, \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & -1, \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array}$$

Tuto úlohu graficky vyřešíme, viz .

Zjistíme tak, že optimum úlohy je v bodě $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ a optimální hodnota účelové funkce je -2.

$\triangle$

Věta 1.15 (Existence optimálního řešení): *Nechť množina*

$$\mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset. \tag{1.4}$$

Když existuje reálné číslo γ tak, že

$$\textit{pro libovolné } x \in \mathbf{M} \textit{ platí } c^\top x \geq \gamma, \tag{1.5}$$

pak existuje optimální řešení úlohy

$$\min\left\{c^\top x \ : \ x \in \mathbf{M}\right\}. \tag{1.6}$$

Důkaz: Označme $\vartheta := \inf\left\{c^\top x \ : \ x \in \mathbf{M}\right\}$.
Za platnosti (1.4) a (1.5) víme, že $\vartheta \in \mathbb{R}$, speciálně $\vartheta \geq \gamma$.
Pomocí Farkasovy věty ukážeme neprázdnost množiny

$$\mathcal{Q} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b,\ c^\top x = \vartheta,\ x \geq \mathbf{0}\right\}. \tag{1.7}$$

Množinu $\mathcal{Q}$ můžeme zapsat jako $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Dx = d,\ x \geq \mathbf{0}\}$, kde $D = \begin{pmatrix} A \\ c^\top \end{pmatrix}$ a $d = \begin{pmatrix} b \\ \vartheta \end{pmatrix}$.
Ověříme podmínku z Farkasovy věty, věta 1.11.

Vezměme proto $u = \begin{pmatrix} v \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$, kde $v \in \mathbb{R}^m$ a $t \in \mathbb{R}$ takové, že

$$D^\top u = A^\top v + tc \geq 0. \tag{1.8}$$

Každé $x \in \mathbf{M}$ je nezáporné a $Ax = b$. Proto pro ně platí

$$0 \leq x^\top A^\top v + tx^\top c = b^\top v + tx^\top c. \tag{1.9}$$

Vezměme posloupnost přípustných řešení x_k, $k \in \mathbb{N}$ tak, aby hodnoty účelové funkce $x_k^\top c$ konvergovaly k ϑ. Pak limitním přechodem dostaneme

$$0 \leq b^\top v + t\vartheta = d^\top u. \tag{1.10}$$

Matice D a vektor d splňují podmínku z věty 1.11.
Tudíž množina $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, což znamená, že uvažovaná úloha má optimální řešení.

Q.E.D.

Ve větě 1.15 je podstatná linearita účelové funkce, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.16: Úlohy

$$\min \left\{ \mathsf{e}^{-x} \ : \ x \geq \mathbf{0}, \ x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\min \left\{ \frac{1}{x} \ : \ x \geq 1, \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

mají konvexní účelovou funkci, která je zdola omezená. Ani jedna z nich však nemá optimální řešení.

$\triangle$

Farkasova věta je součástí teorie lineárních nerovností zpracované na počátku 20. století maďarským matematikem J. Farkasem. Dodnes je právem počítána k základním větám lineární algebry. Její pomocí jsme dokázali větu 1.15, která přesně vymezuje podmínky, kdy úloha lineárního programování ve standardním tvaru má optimální řešení. Není však snadné ověřit podmínky (1.4), (1.5). Dosud také nemáme žádnou představu, jak optimální řešení úlohy nalézt. Musíme proto hlouběji prostudovat strukturu množiny přípustných řešení.

1.4 Struktura množiny přípustných řešení

V této kapitole budeme vyšetřovat strukturu množiny přípustných řešení úlohy lineárního programování ve standardním tvaru. To znamená strukturu množiny

$$\mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ x \geq \mathbf{0}\}, \tag{1.11}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Věta 1.17: *Množina (1.11) je konvexní polyedrická množina. Speciálně je konvexní a uzavřená.*

Důkaz: Evidentně

$$\mathbf{M} = \bigcap_{i=1}^m \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \geq b_i \right\} \cap \bigcap_{i=1}^m \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \leq b_i \right\} \cap \bigcap_{j=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_j \geq 0\}.$$

Množina je průnikem uzavřených poloprostorů a je tedy konvexní polyedrickou množinou.

Q.E.D.

Věta 1.18: *Množina optimálních řešení úlohy lineárního programování ve standardním tvaru*

$$\min\left\{c^\top x \,:\, Ax = b,\ x \geq \mathbf{0},\ x \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{1.12}$$

je konvexní polyedrická množina.

Důkaz: Množinu optimálních řešení můžeme zapsat jako množinu

$$\mathbf{M}^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, c^\top x = \gamma^*,\ Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\},\ \text{kde } \gamma^* = \inf\left\{c^\top x \,:\, Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}.$$

Množina je tedy tvaru (1.11) a tak podle věty 1.17 je konvexní polyedrickou množinou.

Q.E.D.

Nyní si uvedeme charakterizace krajních bodů a krajních směrů.

Věta 1.19: *Pro množinu (1.11) platí*

$$\operatorname{ext}(\mathbf{M}) = \left\{y \in \mathbf{M} \,:\, \mathrm{h}\left(A_{m\times\mathcal{P}(y)}\right) = \operatorname{card}\left(\mathcal{P}(y)\right)\right\}. \tag{1.13}$$

Důkaz: Nechť $x \in \mathbf{M}$.

1. Nutnost

   Předpokládejme, že matice $A_{I\times\mathcal{P}(x)}$ nemá plnou sloupcovou hodnost.
   Pak existuje $t \in \mathbb{R}^n$, $t \neq 0$ takové, že $t_j = 0$ pro $j \in \mathcal{N}(x)$ a $At = 0$.
   Pak existuje $\mu > 0$ takové, že $x^1 = x + \mu t \in \mathbf{M}$, $x^2 = x - \mu t \in \mathbf{M}$.
   Pak však $x^1 \neq x^2$ a $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.
   Tudíž x není krajním bodem $\mathbf{M}$.

2. Postačitelnost

   Předpokládejme, že matice $A_{I\times\mathcal{P}(x)}$ má plnou sloupcovou hodnost.
   Vezměme $x^1, x^2 \in \mathbf{M}$, $0 < \lambda < 1$ takové, že $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$.
   Potom $\mathcal{P}(x) \supset \mathcal{P}\left(x^1\right)$, $\mathcal{P}(x) \supset \mathcal{P}\left(x^2\right)$.
   Pak však $A_{I\times\mathcal{P}(x)}x_{\mathcal{P}(x)} = b$, $A_{I\times\mathcal{P}(x)}x^1_{\mathcal{P}(x)} = b$, $A_{I\times\mathcal{P}(x)}x^2_{\mathcal{P}(x)} = b$.
   Soustava však má jednoznačně určené řešení a proto $x = x^1 = x^2$.
   Tudíž x je krajním bodem $\mathbf{M}$.

Q.E.D.

Nyní o krajních směrech.

Věta 1.20: *Pro množinu (1.11) platí, že*

$$\mathsf{direct}(\mathbf{M}) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = 0,\ x \geq \mathbf{0}\} \tag{1.14}$$

je konvexní polyedrický kužel.

Důkaz: Nejdříve si uvědomme, že (1.14) opravdu charakterizuje směry množiny $\mathbf{M}$. Vezměme nějaké $\tilde{x} \in \mathbf{M}$ a uvědomme si následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} s \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right) &\iff \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \text{ je } \tilde{x} + ts \in \mathbf{M} \\ &\iff \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \text{ je } A(\tilde{x} + ts) = b,\ \tilde{x} + ts \geq 0 \\ &\iff As = 0,\ s \geq 0. \end{aligned}$$

Víme, že množina $\mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$ je konvexní kužel. Indukcí podle m, počtu rovnic v soustavě, ukážeme, že $\mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right) = \mathrm{pos}\left(W\right)$, kde $W \subset \mathbb{R}^n$ je konečná množina.

1. <u>Nechť $m = 1$.</u>

   Tudíž $\mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \eta^\top x = 0,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$, kde $\eta \in \mathbb{R}^n$.

   Sestavme množinu W takto:

   (a) Pro $j \in \mathcal{N}\left(\eta\right)$ přidáme $\mathsf{e}_{j:n}$ do W.

   (b) Pro $j \in \mathcal{P}\left(\eta\right)$ a $k \in \mathcal{Z}\left(\eta\right)$ přidáme $|\eta_k|\mathsf{e}_{j:n} + \eta_j \mathsf{e}_{k:n}$ do W.

   Evidentně $W \subset \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, neboť pro každé $w \in W$ platí $\eta^\top w = 0$. Tudíž $\mathrm{pos}\left(W\right) \subset \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$.

   Předpokládejme, že $\mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right) \setminus \mathrm{pos}\left(W\right) \neq \emptyset$.

   Pak každý bod z této množiny musí mít alespoň jednu složku kladnou.

   Vezměme $y \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right) \setminus \mathrm{pos}\left(W\right)$ takové, že má mezi všemi body této množiny nejmenší počet kladných složek.

   Vezměme libovolný index $j \in \mathcal{P}\left(y\right)$. Nyní jsou právě tři možnosti.

   (a) <u>$\eta_j = 0$</u>

   Pak $\mathsf{e}_{j:n} \in W$. Označme $\tilde{v} = y_j \mathsf{e}_{j:n}$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.

   Potom $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\left(W\right)$ a $\mathcal{P}\left(\tilde{y}\right) = \mathcal{P}\left(y\right) \setminus \{j\}$.

   (b) <u>$\eta_j > 0$</u>

   Pak musí existovat index $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že $y_k > 0$ a $\eta_k < 0$. Jinak by nemohlo platit $\eta^\top y = 0$ a y by nebylo prvkem $\mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$.

   Tudíž $v = |\eta_k|\mathsf{e}_{j:n} + \eta_j \mathsf{e}_{k:n} \in W$.

   i. Když $\frac{y_j}{|\eta_k|} < \frac{y_k}{\eta_j}$, potom označíme $\tilde{v} = \frac{y_j}{|\eta_k|} v$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.
   Platí $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\left(W\right)$ a $\mathcal{P}\left(\tilde{y}\right) = \mathcal{P}\left(y\right) \setminus \{j\}$.

   ii. Když $\frac{y_j}{|\eta_k|} = \frac{y_k}{\eta_j}$, potom označíme $\tilde{v} = \frac{y_j}{|\eta_k|} v$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.
   Platí $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\left(W\right)$ a $\mathcal{P}\left(\tilde{y}\right) = \mathcal{P}\left(y\right) \setminus \{j, k\}$.

   iii. Když $\frac{y_j}{|\eta_k|} > \frac{y_k}{\eta_j}$, potom označíme $\tilde{v} = \frac{y_k}{\eta_j} v$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.
   Platí $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\left(W\right)$ a $\mathcal{P}\left(\tilde{y}\right) = \mathcal{P}\left(y\right) \setminus \{k\}$.

   (c) <u>$\eta_j < 0$</u>

   Pak musí existovat index $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že $y_k > 0$ a $\eta_k > 0$. Jinak by nemohlo platit $\eta^\top y = 0$ a y by nebylo prvkem $\mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$.

   Tudíž $v = \eta_k \mathsf{e}_{j:n} + |\eta_j|\mathsf{e}_{k:n} \in W$.

   i. Když $\frac{y_j}{\eta_k} < \frac{y_k}{|\eta_j|}$, potom označíme $\tilde{v} = \frac{y_j}{\eta_k} v$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.
   Platí $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\left(W\right)$ a $\mathcal{P}\left(\tilde{y}\right) = \mathcal{P}\left(y\right) \setminus \{j\}$.

   ii. Když $\frac{y_j}{\eta_k} = \frac{y_k}{|\eta_j|}$, potom označíme $\tilde{v} = \frac{y_j}{\eta_k} v$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.
   Platí $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\left(W\right)$ a $\mathcal{P}\left(\tilde{y}\right) = \mathcal{P}\left(y\right) \setminus \{j, k\}$.

iii. Když $\frac{y_j}{\eta_k} > \frac{y_k}{|\eta_j|}$, potom označíme $\tilde{v} = \frac{y_k}{|\eta_j|} v$ a $\tilde{y} = y - \tilde{v}$.
Platí $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$, $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\,(W)$ a $\mathcal{P}\,(\tilde{y}) = \mathcal{P}\,(y) \setminus \{k\}$.

Ve všech třech případech jsme vyjádřili uvažovaný bod jako součet $y = \tilde{y} + \tilde{v}$, kde $\tilde{y} \in \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$ a $\tilde{v} \in \mathrm{pos}\,(W)$. Avšak $\tilde{y}$ má méně kladných složek nežli bod y. Protože y má nejmenší počet kladných složek mezi všemi body množiny $\mathsf{direct}\,(\mathbf{M}) \setminus \mathrm{pos}\,(W)$ musí nutně $\tilde{y} \in \mathrm{pos}\,(W)$.

Proto $y \in \mathrm{pos}\,(W)$, což je ve sporu s naším předpokladem.

Ukázali jsme, že $\mathsf{direct}\,(\mathbf{M}) = \mathrm{pos}\,(W)$.

2. Nechť tvrzení platí pro $1, 2, \ldots, m$.

Mějme soustavu $m+1$ rovnic $Ax = 0$ a $A = \begin{pmatrix} B \\ \eta^\top \end{pmatrix}$.

Z indukčního předpokladu pro prvních m rovnic existuje konečná množina $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Bx = \mathbf{0},\ x \geq \mathbf{0}\} = \mathrm{pos}\,(W_1)\,.$$

Sestavme z vektorů množiny W_1 matici $\widetilde{W_1}$. Pak

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Bx = \mathbf{0},\ x \geq \mathbf{0}\} = \mathrm{pos}\,(W_1) = \left\{\widetilde{W_1}\mu \,:\, \mu \in \mathbb{R}^{W_1},\ \mu \geq \mathbf{0}\right\}.$$

Množinu, kterou studujeme můžeme přepsat následovně

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = 0,\ x \geq \mathbf{0}\} &= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Bx = \mathbf{0},\ \eta^\top x = 0,\ x \geq \mathbf{0}\} \\ &= \left\{\widetilde{W_1}\mu \,:\, \eta^\top \widetilde{W_1}\mu = 0,\ \mu \in \mathbb{R}^{W_1},\ \mu \geq \mathbf{0}\right\}. \end{aligned}$$

Množina $\left\{\mu \in \mathbb{R}^{W_1} \,:\, \eta^\top \widetilde{W_1}\mu = 0,\ \mu \geq \mathbf{0}\right\}$ je však množina typu, který vyšetřujeme a je zadána jedinou rovnicí.

Z indukčního předpokladu proto existuje konečná množina $W_2 \subset \mathbb{R}^{W_1}$ a potažmo z jejích vektorů sestavená matice $\widetilde{W_2}$ tak, že

$$\left\{\mu \in \mathbb{R}^{W_1} \,:\, \eta^\top \widetilde{W_1}\mu = 0,\ \mu \geq \mathbf{0}\right\} = \mathrm{pos}\,(W_2) = \left\{\widetilde{W_2}\nu \,:\, \nu \in \mathbb{R}^{W_2},\ \nu \geq \mathbf{0}\right\}.$$

Dosadíme-li toto pozorování do předchozí rovnosti dostáváme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = 0,\ x \geq \mathbf{0}\} = \left\{\widetilde{W_1}\widetilde{W_2}\nu \,:\, \nu \in \mathbb{R}^{W_2},\ \nu \geq \mathbf{0}\right\}.$$

Označíme-li $\widetilde{W} = \widetilde{W_1}\widetilde{W_2}$ a množinu sloupců této matice jako W, pak

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = 0,\ x \geq \mathbf{0}\} = \left\{\widetilde{W}\nu \,:\, \nu \in \mathbb{R}^{W_2},\ \nu \geq \mathbf{0}\right\} = \mathrm{pos}\,(W)\,.$$

Tím jsme ukázali, že i pro $m+1$ rovnic je studovaná množina konvexním polyedrickým kuželem.

Q.E.D.

V důkazu věty 1.20 jsme vlastně konstruovali krajní směry množiny (1.11). Vše lze shrnout do následující charakterizace.

Věta 1.21: *Konvexní polyedrický kužel*

$$\mathsf{direct}\,(\mathbf{M}) = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; Ax = 0,\; x \geq \mathbf{0}\}\,, \tag{1.15}$$

je generován množinou svých krajních směrů

$$\mathrm{extd}\,(\mathbf{M}) = \left\{y \in \mathsf{direct}\,(\mathbf{M}) \;:\; \mathrm{h}\left(A_{m\times\mathcal{P}(y)}\right) = \mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(y)) - 1,\; \|y\| = 1\right\}. \tag{1.16}$$

Platí tedy $\mathsf{direct}\,(\mathbf{M}) = \mathrm{pos}\,(\mathrm{extd}\,(\mathbf{M}))$.

Důkaz: Viz [6].

Q.E.D.

Příklad 1.22: Chceme popsat všechna nezáporná řešení homogenní rovnice o šesti neznámých

$$5y_1 - 3y_2 + 2y_4 - y_6 = 0,\; y \geq \mathbf{0},\; y \in \mathbb{R}^6.$$

Podle věty 1.20 víme, že každé takové řešení je tvaru $y = W\mu$, $\mu \geq \mathbf{0}$. Matici W sestavíme postupem vyloženým v důkazu této věty

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

△

Pokud má matice A plnou řádkovou hodnost, hledáme krajní body a krajní směry množiny přípustných řešení pomocí regulárních podmatic matice A.

Lemma 1.23 *Nechť* $\mathrm{h}\,(A) = m$. *Pak*

1. *Projdeme všechna* $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *taková, že* $\mathrm{card}\,(S) = m$, $A_{I\times S}$ *je regulární matice a* $A^{-1}_{I\times S}b \geq \mathbf{0}$. *Toto řešení doplníme nulami na vektor* x *tak, že* $x_{\mathcal{P}(x)} = A^{-1}_{I\times S}b$. *Pak* $x \in \mathrm{ext}\,(\mathbf{M})$. *Nalezneme takto všechny krajní body* $\mathbf{M}$.
2. *Projdeme všechna* $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *taková, že* $\mathrm{card}\,(S) = m + 1$, $\mathrm{h}\,(A_{I\times S}) = m$ *a existuje* $\xi \geq \mathbf{0}$, $\xi \neq \mathbf{0}$ *takové, že* $A_{I\times S}\xi = \mathbf{0}$. *Toto řešení doplníme nulami na vektor* x *tak, že* $x_{\mathcal{P}(x)} = \xi$. *Pak* $\frac{x}{\|x\|} \in \mathrm{extd}\,(\mathbf{M})$. *Nalezneme takto všechny krajní směry* $\mathbf{M}$.

Důkaz: Když je x krajním bodem množiny přípustných řešení, pak podle věty 1.19 jsou sloupce matice A odpovídající jeho kladným složkám nezávislé. Nemůže jich proto být více nežli je hodnost matice A. Dále jde k těmto sloupcům vždy přidat další sloupce matice A tak, že vzniklá matice má plnou sloupcovou hodnost a ta je rovna hodnosti matice A, tj m. Řešení příslušné rovnice je pak určeno jednoznačně a musí jím být zadaný krajní bod x. Proto každé matici sestavené ze sloupců matice A, která je regulární, odpovídá nejvýše jeden krajní bod. Těchto matic je nejvýše $\binom{n}{\mathrm{h}(A)}$ a proto ani krajních bodů nemůže být více.

Podobnou úvahou s využitím věty 1.21 dokážeme charakterizaci krajních směrů.

Q.E.D.

Ukážeme si, že množinu přípustných řešení lze rozložit na součet konvexního polyedru a konvexního polyedrického kužele. Nejdříve definujme pomocnou množinu, můžeme jí říkat například „ dno množiny“ $\mathbf{M}$”,

$$\mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right) \quad = \quad \left\{x \in \mathbf{M} \;:\; \text{neexistuje } y \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right),\; y \neq 0,\; y \leq x\right\}. \tag{1.17}$$

Věta 1.24: *Pro množinu (1.11) platí*

$$\mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right) \quad \subset \quad \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right). \tag{1.18}$$

Důkaz: Předpokládejme, že $\mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right) \setminus \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right) \neq \emptyset$.
Vezměme $x \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right) \setminus \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right)$ takové, že ze všech bodů z této množiny má nejmenší počet kladných složek.
Pak $A_{I\times\mathcal{P}(x)}x_{\mathcal{P}(x)} = b$ a matice $A_{I\times\mathcal{P}(x)}$ nemá plnou sloupcovou hodnost.
To znamená, že existuje $t \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}(x)}$, $t \neq 0$ netriviální řešení soustavy $A_{I\times\mathcal{P}(x)}t = 0$.
Vezměme $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $s_j = t_j$ pro $j \in \mathcal{P}\left(x\right)$ a $s_j = 0$ pro $j \in \mathcal{N}\left(x\right)$.
Evidentně $As = 0$, $s \neq 0$ a $\mathcal{N}\left(s\right) \supset \mathcal{N}\left(x\right)$.

a) Když $s \geq 0$, pak $s \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$ a existuje $\alpha > 0$ takové, že $\alpha s \leq x$. Což je ve sporu s předpokladem, že $x \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right)$.

b) Když $s \leq 0$, pak $-s \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$ a existuje $\alpha > 0$ takové, že $-\alpha s \leq x$. Což je ve sporu s předpokladem, že $x \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right)$.

c) Nechť existuje alespoň jedna kladná a alespoň jedna záporná složka vektoru s.

   Položme $x^1 = x + \hat{\theta}s$, $x^2 = x - \hat{\eta}s$, kde $\hat{\theta} = \max\left\{\theta \;:\; x + \theta s \geq 0,\; \theta \geq 0\right\}$
   a $\hat{\eta} = \max\left\{\eta \;:\; x - \eta s \geq 0,\; \eta \geq 0\right\}$.

   Jistě $\hat{\theta} > 0$, $\hat{\eta} > 0$, $\mathcal{P}\left(x^1\right) \subset \mathcal{P}\left(x\right)$, $\mathcal{P}\left(x^2\right) \subset \mathcal{P}\left(x\right)$, $\mathcal{P}\left(x^1\right) \neq \mathcal{P}\left(x\right)$, $\mathcal{P}\left(x^2\right) \neq \mathcal{P}\left(x\right)$.

   Tudíž $x^1, x^2 \notin \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right) \setminus \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right)$.

   1. Vezměme $v \in \mathsf{direct}\left(\mathbf{M}\right)$, $v \neq 0$ a $v \leq x^1$.
      Pak $\mathcal{P}\left(v\right) \subset \mathcal{P}\left(x^1\right) \subset \mathcal{P}\left(x\right)$.
      Proto existuje $\alpha > 0$ takové, že $\alpha v \leq x$.
      Víme, že $x \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right)$ a tak nutně $v = 0$.
      To ale znamená, že $x^1 \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right)$.
   2. Obdobně se ukáže, že $x^2 \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right)$.

   Zjišťujeme tedy, že $x^1, x^2 \in \mathsf{btt}\left(\mathbf{M}\right) \cap \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right)$.

   Dále $x = \frac{\hat{\eta}}{\hat{\theta}+\hat{\eta}}x^1 + \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+\hat{\eta}}x^2$.

   Bod x jsme vyjádřili jako konvexní lineární kombinaci bodů z konvexní množiny $\operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right)$.

   Tudíž $x \in \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\mathbf{M}\right)\right)$, což je spor s naším předpokladem.

Tím je inkluze (1.18) ukázána.

Q.E.D.

Věta 1.25: *Pro množinu (1.11) platí* $\mathbf{M} = \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$.

Důkaz:

1. Když je množina (1.11) prázdná, pak $\mathbf{M} = \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$, protože $\mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) = \emptyset$ a $\mathsf{direct}\,(\mathbf{M}) = \mathrm{pos}\,(\emptyset) = \{0\}$.

2. Nechť je množina (1.11) neprázdná.

   Pak také $\mathsf{btt}\,(\mathbf{M})$ a $\mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$ jsou neprázdné.

   Vezměme $p \in \mathsf{btt}\,(\mathbf{M})$ a $k \in \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$, pak $p + k \in \mathbf{M}$ podle lemmatu 1.30, neboť $\mathbf{M}$ je uzavřená konvexní množina.

   Tudíž $\mathbf{M} \supset \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$.

3. Nechť je množina (1.11) neprázdná a $x \in \mathbf{M}$.

   Pak jsou dvě možnosti.

   (a) Nechť $x \in \mathsf{btt}\,(\mathbf{M})$, pak však také $x \in \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$.

   (b) Nechť $x \notin \mathsf{btt}\,(\mathbf{M})$.
   Pak existuje $y \in \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$, $y \neq 0$ takové, že $y \leq x$.
   Označme $\hat{\mu} = \max\{\mu \,:\, x - \mu y \geq \mathbf{0},\ \mu \geq \mathbf{0}\}$.
   Pak $\tilde{x} = x - \hat{\mu} y \in \mathbf{M}$ a $\mathcal{P}(\tilde{x}) \subset \mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}(\tilde{x}) \neq \mathcal{P}(x)$.
   Postup opakujeme pro $\tilde{x}$.
   Po konečně krocích se postup zastaví tak, že $\tilde{x} \in \mathsf{btt}\,(\mathbf{M})$.

   Získáme tak bod x jako součet bodu z $\mathsf{btt}\,(\mathbf{M})$ a konečně bodů z $\mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$. Jinak řečeno $x \in \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$.

   Tudíž $\mathbf{M} \subset \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$.

Ukázali jsme, že $\mathbf{M} = \mathsf{btt}\,(\mathbf{M}) + \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$.

Q.E.D.

Věta 1.26 (rozklad množiny přípustných řešení): *Množina (1.11) je součtem konvexního polyedru a konvexního polyedrického kužele. Speciálně* $\mathbf{M} = \mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\,(\mathbf{M})) + \mathrm{pos}\,(\mathrm{extd}\,(\mathbf{M}))$.

Důkaz: Plyne přímo z vět 1.25 a 1.24.

Q.E.D.

Příklad 1.27: Rozložme množinu přípustných řešení z příkladu 1.13.

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x_1 - x_2 - x_3 = -2,\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.\right\}$$

Nejdříve najdeme krajní směry.

1. S jednou kladnou složkou není žádný krajní směr, neboť matice A neobsahuje nulový sloupec.

2. Se dvěma kladnými složkami není žádný krajní směr, neboť všechny podmatice typu 2×2 matice A jsou regulární.

3. Pro krajní směr se třemi kladnými složkami jsou čtyři možnosti.
   (a) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ -x_1 + 2x_2 = 0$ s řešením $(2,1,3,0)^\top$.
   (b) $2x_1 - x_2 = 0,\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ s řešením $(1,2,0,3)^\top$.
   (c) $2x_1 - x_3 = 0,\ -x_1 - x_4 = 0$ s řešením $(1,0,2,-1)^\top$. Bod nevyhovuje protože má jednu složku zápornou.
   (d) $-x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 - x_4 = 0$ s řešením $(0,1,-1,2)^\top$. Bod nevyhovuje protože má jednu složku zápornou.

Nyní najdeme krajní bod.

Matice A má hodnost 2. Proto libovolný sloupec matice A lze doplnit nějakým dalším sloupcem matice A na regulární matici. Řešení příslušné rovnice je pak určeno jednoznačně. Proto musí vyjít krajní bod s kterým jsme začali.

Stačí proto uvažovat pouze podmatice matice A, které jsou typu 2×2 a regulární.

1. $2x_1 - x_2 = -2,\ -x_1 + 2x_2 = -1$ s řešením $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right)^\top$.
   Bod nevyhovuje protože má dvě složky záporné.
2. $2x_1 - x_3 = -2,\ -x_1 = -1$ s řešením $(1,0,4,0)^\top$.
3. $2x_1 = -2,\ -x_1 - x_4 = -1$ s řešením $(-1,0,0,2)^\top$.
   Bod nevyhovuje protože má jednu složku zápornou.
4. $-x_2 - x_3 = -2,\ 2x_2 = -1$ s řešením $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)^\top$.
   Bod nevyhovuje protože má jednu složku zápornou.
5. $-x_2 = -2,\ 2x_2 - x_4 = -1$ s řešením $(0,2,0,5)^\top$.
6. $-x_3 = -2,\ -x_4 = -1$ s řešením $(0,0,2,1)^\top$.

Daná množina má rozklad $\mathcal{M} = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(\mathcal{M})) + \operatorname{pos}(\operatorname{extd}(\mathcal{M}))$, přičemž

$$\operatorname{extd}(\mathcal{M}) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2\\1\\3\\0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{ext}(\mathcal{M}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\4\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}. .$$

Ještě si uvědomme, jak vypadá „ dno“ této množiny

$$\mathsf{btt}(\mathcal{M}) = \operatorname{conv}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\4\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix} \right\} \right) \cup \operatorname{conv}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

△

Krajní body a krajní směry množiny přípustných řešení máme přesně popsány. Umíme proto odhadnout jejich počet.

Lemma 1.28 *Je-li x krajním bodem* $\mathbf{M}$, *pak* $\operatorname{card}(\mathcal{P}(x)) \le \operatorname{h}(A) \le m$, *a je-li s krajním směrem* $\mathbf{M}$, *pak* $\operatorname{card}(\mathcal{P}(s)) \le \operatorname{h}(A) + 1 \le m + 1$.

Množina $\mathbf{M}$ *má nejvýše* $\binom{n}{\operatorname{h}(A)}$ *krajních bodů a nejvýše* $\binom{n}{\operatorname{h}(A)+1}$ *krajních směrů.*

Důkaz: Když je x krajním bodem množiny přípustných řešení, pak podle věty 1.19 jsou sloupce matice A odpovídající jeho kladným složkám nezávislé. Nemůže jich proto být více nežli je hodnost matice A.

Dále jde k těmto sloupcům vždy přidat další sloupce matice A tak, že vzniklá matice má plnou sloupcovou hodnost a ta je rovna hodnosti matice A. Řešení příslušné rovnice je pak určeno jednoznačně a musí jím být zadaný krajní bod x. Proto každé matici sestavené ze sloupců matice A, která má plnou sloupcovou hodnost rovnu hodnosti A, odpovídá nejvýše jeden krajní bod. Těchto matic je nejvýše $\binom{n}{\mathrm{h}(A)}$ a proto ani krajních bodů nemůže být více.

Podobnou úvahou s využitím věty 1.21 zjistíme, že krajních směrů nemůže být více než $\binom{n}{\mathrm{h}(A)+1}$.

Q.E.D.

Dalším důsledkem je následující tvrzení o existenci přípustného řešení úlohy LP ve standardním tvaru.

Věta 1.29: *Množina přípustných řešení* $\mathbf{M}$ *je neprázdná tehdy a jen tehdy, existuje-li krajní bod* $\mathbf{M}$.

Důkaz: Podle věty 1.26 víme, že $\mathbf{M} = \mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\,(\mathbf{M})) + \mathrm{pos}\,(\mathrm{extd}\,(\mathbf{M}))$.
Pak krajní body polyedru $\mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\,(\mathbf{M}))$ se shodují s krajními body $\mathbf{M}$.
Tudíž $\mathbf{M}$ je neprázdná tehdy a jen tehdy, když polyedr $\mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\,(\mathbf{M}))$ je neprázdný a to je tehdy a jen tehdy, když polyedr $\mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\,(\mathbf{M}))$ má krajní bod a to je tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{M}$ má krajní bod.

Q.E.D.

Definice 1.30 *Krajní bod* $\mathbf{M}$ *nazveme* *nedegenerovaný*, *má-li právě* $\mathrm{h}\,(A)$ *nenulových složek.*

Úloha lineárního programování ve standardním tvaru se nazývá *nedegenerovaná*, *jestliže každý krajní bod její množiny přípustných řešení je nedegenerovaný.*

Příklad 1.31: Množina

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x_1 + x_2 \geq 2,\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6,\ x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$$

△

Věta 1.32: *Úloha lineárního programování ve standardním tvaru*

$$\min \left\{ c^\top x \,:\, Ax = b,\ x \geq \mathbf{0},\ x \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{1.19}$$

má optimální řešení tehdy a jen tehdy, když

i) $\mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$.

ii) $c^\top y \geq \mathbf{0}$ *pro každé* $y \in \mathrm{extd}\,(\mathbf{M})$.

Má-li úloha (1.19) optimální řešení, pak se ho nabývá v krajním bodě $\mathbf{M}$.

Důkaz: Existence přípustného řešení je nutnou podmínkou pro existenci optimálního řešení. Stačí tedy diskutovat podmínku ii) za platnosti $\mathbf{M} \neq \emptyset$.

1. Nechť podmínka ii) neplatí.
   Pak najdeme $y \in \operatorname{extd}(\mathbf{M})$ takové, že splňuje $c^\top y < 0$.
   K němu existuje $m \in \mathbf{M}$ tak, že $m + \alpha y \in \mathbf{M}$ pro každé $\alpha \geq 0$.
   Dále platí
$$c^\top (m + \alpha y) = c^\top m + \alpha c^\top y \to -\infty \quad \text{při } \alpha \to +\infty.$$
   Tudíž úloha (1.19) nemá optimální řešení.

2. Nechť platí ii).
   (a) Nechť $x \in \mathbf{M}$.
   Podle věty 1.26 víme, že $\mathbf{M} = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(\mathbf{M})) + \operatorname{pos}(\operatorname{extd}(\mathbf{M}))$.
   Pak existují $\lambda(z) \geq 0$, $z \in \operatorname{ext}(\mathbf{M})$ s vlastností $\sum_{z\in\operatorname{ext}(\mathbf{M})} \lambda(z) = 1$ a $\varphi(w) \geq 0$ pro $w \in \operatorname{extd}(\mathbf{M})$ tak, že
$$x = \sum_{z\in\operatorname{ext}(\mathbf{M})} \lambda(z)z + \sum_{w\in\operatorname{extd}(\mathbf{M})} \varphi(w)w.$$
   Potom
$$\begin{aligned} c^\top x &= c^\top \left(\sum_{z\in\operatorname{ext}(\mathbf{M})} \lambda(z)z + \sum_{w\in\operatorname{extd}(\mathbf{M})} \varphi(w)w \right) \\ &= \sum_{z\in\operatorname{ext}(\mathbf{M})} \lambda(z)c^\top z + \sum_{w\in\operatorname{extd}(\mathbf{M})} \varphi(w)c^\top w \\ &\geq \sum_{z\in\operatorname{ext}(\mathbf{M})} \lambda(z)c^\top z \geq \min\left\{c^\top z \,:\, z \in \operatorname{ext}(\mathbf{M})\right\}. \end{aligned}$$
   (b) Když $z \in \operatorname{ext}(\mathbf{M})$, pak $z \in \mathbf{M}$.
   Proto platí
$$\min\left\{c^\top x \,:\, x \in \mathbf{M}\right\} \leq \min\left\{c^\top z \,:\, z \in \operatorname{ext}(\mathbf{M})\right\}.$$
   Úloha (1.19) má optimální řešení a alespoň jedno z nich je krajním bodem $\mathbf{M}$.

Q.E.D.

Výsledky shrnuje následující věta.

Věta 1.33 (Základní věta lineárního programování): *Pro úlohu lineárního programování ve standardním tvaru, t.j. (1.19), nastává pouze jedna ze tří možností:*

a) $\mathbf{M} = \emptyset$,

b) $\mathbf{M} \neq \emptyset$ *a* $\inf_{x\in\mathbf{M}} c^\top x = -\infty$ *(tj.* $\mathbf{M}^* = \emptyset$*),*

c) $\mathbf{M}^* \neq \emptyset$.

Navíc pak

- *je-li* $\mathbf{M} \neq \emptyset$*, existuje krajní bod* $\mathbf{M}$*,*
- *je-li* $\mathbf{M}^* \neq \emptyset$*, existuje krajní bod* $\mathbf{M}$*, který je optimálním řešením úlohy (1.19).*

Příklad 1.34: Úloha

$$\min \left\{ x_1 + x_2 \ : \ 2x_1 + x_2 \geq \frac{3}{2},\ x_1 + x_2 \geq 1,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$$

△

Věta 1.32 nám dává návod jak hledat optimální řešení úlohy (1.19). Použijeme zavedené značení a označíme $\mathbf{M}$ množinu všech přípustných řešení úlohy (1.19)

Přímá metoda řešení úlohy LP

KROK 0: Nalezneme všechny krajní body množiny $\mathbf{M}$ a jdeme na **KROK 1**.

KROK 1: Pokud neexistuje žádný krajní bod množiny $\mathbf{M}$, pak jdeme na **END 1**, jinak pokračujeme na **KROK 2**.

KROK 2: Označíme si $\hat{x}$ ten krajní bod množiny $\mathbf{M}$, pro které nabývá účelová funkce úlohy (1.19) minimální hodnotu. Jdeme na **KROK 3**.

KROK 3: Nalezneme všechny krajní směry množiny $\mathbf{M}$ a jdeme na **KROK 4**.

KROK 4: Pokud je hodnota účelové funkce na všech krajních směrech množiny $\mathbf{M}$ nezáporná, pak jdeme na **END 3**, jinak vybereme krajní směr $\hat{s}$, pro nějž je hodnota účelové funkce záporná a jdeme na **END 2**.

END 1: Úloha (1.19) nemá přípustné řešení.

END 2: Úloha (1.19) má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení, protože účelová funkce ve směru $\hat{s}$ klesá na množině přípustných řešení pode všechny meze.

END 3: $\hat{x}$ je optimální řešení úlohy (1.19).

♢

Příklad 1.35: Přímou metodou vyřešíme úlohu

$$\min \left\{ 3x_1 - x_2 \ : \ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2,\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1,\ x \in \mathbb{R}^4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \right\}.$$

Podle příkladu 1.27 víme, že $\mathbf{M} = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(\mathbf{M})) + \operatorname{pos}(\operatorname{extd}(\mathbf{M}))$, přičemž

$$\operatorname{extd}(\mathbf{M}) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{ext}(\mathbf{M}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Účelová funkce má na $\operatorname{ext}(\mathbf{M})$ hodnoty 3, -2, 0 a na $\operatorname{extd}(\mathbf{M})$ hodnoty $\frac{5}{\sqrt{14}}$ a $\frac{1}{\sqrt{14}}$. Podle věty 1.32 má úloha optimální řešení v bodě $(0, 2, 0, 5)^\top$ a optimální hodnota je -2.

△

Přímá metoda je numericky schůdná jen pro velice malé úlohy. Pro nalezení optimálního řešení úlohy (1.19) se nejčastěji používá simplexová metoda, která je vlastně Gaussův eliminační algoritmus pro řešení soustavy rovnic $Ax = b$ doplněný pravidlem pro zachování nezápornosti řešení a pravidlem, které dbá na to, aby hodnoty účelové funkce klesaly. S touto metodou se seznámíme v kapitole 1.7.

1.5 Princip duality v lineárním programování

V této kapitole se budeme zabývat dvojicí duálních úloh lineárního programování

$$\min\left\{c^\top x \,:\, A_{I_1\times J}x \ge b_{I_1},\ A_{I_2\times J}x \le b_{I_2},\ A_{I_3\times J}x = b_{I_3},\ x_{J_1} \ge \mathbf{0},\ x_{J_2} \le \mathbf{0},\ x \in \mathbb{R}^{J_3}\right\}, \tag{1.20}$$

$$\max\left\{b^\top y \,:\, \left(A_{I\times J_1}\right)^\top y \le c_{J_1},\ \left(A_{I\times J_2}\right)^\top y \ge c_{J_2},\ \left(A_{I\times J_3}\right)^\top y = c_{J_3},\ y_{I_1} \ge \mathbf{0},\ y_{I_2} \le \mathbf{0},\ y \in \mathbb{R}^{I_3}\right\}, \tag{1.21}$$

kde $c \in \mathbb{R}^J$, $b \in \mathbb{R}^I$, $A \in \mathbb{R}^{I\times J}$, $\operatorname{card}(I) = m$, $I_1, I_2, I_3 \subset I$ jsou disjunktní a $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$, $\operatorname{card}(J) = n$, $J_1, J_2, J_3 \subset J$ jsou disjunktní a $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J$.

Povšimněme si, že k zadané úloze lineárního programování je jednoznačně přiřazena úloha, která s ní tvoří dvojici duálních úloh. Toto však není jediný vztah mezi těmito dvěma úlohami. Daleko důležitější je, že vyřešením jedné z nich, nalezneme také řešení druhé úlohy z tohoto páru. Na této vlastnosti je založena simplexová metoda, která umožňuje efektivní numerické řešení úloh lineárního programování. Každá z těchto úloh také vypovídá o stabilitě optimálního řešení druhé úlohy.

Vlastnosti a teorie dvojice duálních úloh lineárního programování je součástí a speciálním případem teorie Lagrangeovy duality. Souvisí také s pojmem adjungovaná funkce a teorií Fenchelovy duality. Tato teorie však překračuje rámec této přednášky. Zvídavého čtenáře odkazujeme na monografii [6], kde jsou oba dualizační postupy vysvětleny. Při odvozování a vysvětlování duality v lineárním programování vystačíme s přímými výpočty.

Víme již, že lze jeden typ úloh lineárního programování ekvivalentně převádět na jiný typ úloh. Není proto potřeba při odvozování vztahů a vlastností uvažovat obecnou dvojici duálních úloh (1.20) a (1.21). Stačí vlastnost ukázat pro jeden typ duální dvojice a pak ji pomocí povolených transformací převést, přeložit pro obecnou duální dvojici. Vlastnosti, které budeme studovat, jsou navíc povolenými transformacemi zachovávány. Věty budeme proto formulovat obecně, ale důkazy budeme provádět pouze pro dvojici symetrických duálních úloh

$$\min\left\{c^\top x \,:\, Ax \ge b,\ x \ge \mathbf{0},\ x \in \mathbb{R}^J\right\}, \tag{1.22}$$

$$\max\left\{b^\top y \,:\, A^\top y \le c,\ y \ge \mathbf{0},\ y \in \mathbb{R}^I\right\}. \tag{1.23}$$

Definice 1.36 *V této kapitole budeme označovat:*

$$\mathbf{M} := \left\{x \in \mathbb{R}^J \,:\, A_{I_1\times J}x \ge b_{I_1},\ A_{I_2\times J}x \le b_{I_2},\ A_{I_3\times J}x = b_{I_3},\ x_{J_1} \ge \mathbf{0},\ x_{J_2} \le \mathbf{0}\right\}, \tag{1.24}$$

$$\mathbf{N} := \left\{y \in \mathbb{R}^I \,:\, \left(A_{I\times J_1}\right)^\top y \le c_{J_1}, \left(A_{I\times J_2}\right)^\top y \ge c_{J_2}, \left(A_{I\times J_3}\right)^\top y = c_{J_3}, y_{I_1} \ge \mathbf{0},\ y_{I_2} \le \mathbf{0}\right\}, \tag{1.25}$$

$$\gamma^* := \inf\left\{c^\top x \,:\, x \in \mathbf{M}\right\}, \tag{1.26}$$

$$\delta^* := \sup\left\{b^\top y \,:\, y \in \mathbf{N}\right\}, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{M}^* := \left\{x \in \mathbf{M} \,:\, c^\top x = \gamma^*\right\}, \tag{1.28}$$

$$\mathbf{N}^* := \left\{y \in \mathbf{N} \,:\, b^\top y = \delta^*\right\}, \tag{1.29}$$

$$\tag{1.30}$$

Věta 1.37 (o slabé dualitě): *Pro dvojici duálních úloh (1.20), (1.21) a jejich přípustná řešení $x \in \mathbf{M}$ a $y \in \mathbf{N}$ platí $c^\top x \ge b^\top y$.*

Přičemž rovnost nastává pouze tehdy, když jsou splněny podmínky komplementarity

$$\forall j \in J:\ \text{buď } \left(A^\top y - c\right)_j = 0 \text{ nebo } x_j = 0, \tag{1.31}$$

$$\forall i \in I:\ \text{buď } (Ax - b)_i = 0 \text{ nebo } y_i = 0. \tag{1.32}$$

Důkaz: Tvrzení věty stačí dokázat pro dvojici symetrických duálních úloh (1.22), (1.23).
Pro $x \in \mathbf{M}$ a $y \in \mathbf{N}$ platí

$$c^\top x \geq y^\top Ax = x^\top A^\top y \geq b^\top y.$$

Rovnost nastává pouze pokud platí podmínky (1.31) a (1.32).

Q.E.D.

Věta 1.38 (o dualitě): *Když $\mathbf{M} \neq \emptyset$ a $\mathbf{N} \neq \emptyset$, pak mají obě úlohy (1.20) i (1.21) optimální řešení.*

Důkaz: Tvrzení věty stačí dokázat pro dvojici symetrických duálních úloh (1.22), (1.23).
Když mají obě úlohy přípustné řešení, pak vzhledem k větě 1.37 jsou jejich účelové funkce omezené na příslušných množinách přípustných řešení.
Pak úloha

$$\min \left\{ c^\top x \,:\, Ax - v = b,\; x \geq \mathbf{0},\; v \geq \mathbf{0},\; x \in \mathbb{R}^n,\; v \in \mathbb{R}^m \right\} \tag{1.33}$$

má účelovou funkci zdola omezenou na své množině přípustných řešení, která je neprázdná. Podle věty 1.15 existuje $(\hat{x}, \hat{v})$ optimální řešení (1.33). Pak $\hat{x}$ je optimální řešení (1.22).
Dále také úloha

$$\min \left\{ -b^\top y \,:\, A^\top y + u = c,\; y \geq \mathbf{0},\; u \geq \mathbf{0},\; y \in \mathbb{R}^m,\; u \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{1.34}$$

má účelovou funkci zdola omezenou na své množině přípustných řešení, která je neprázdná. Podle věty 1.15 existuje $(\hat{y}, \hat{u})$ optimální řešení (1.34). Pak $\hat{y}$ je optimální řešení (1.23).

Q.E.D.

Věta 1.39 (o silné dualitě): *Úloha (1.20) má optimální řešení tehdy a jen tehdy, když úloha (1.21) má optimální řešení.*

Pokud jedna z těchto úloh má optimální řešení, pak platí rovnost $\gamma^* = \delta^*$.

Důkaz: Tvrzení věty stačí dokázat pro dvojici symetrických duálních úloh (1.22), (1.23). Stačí se zabývat pouze případem, kdy existuje optimální řešení úlohy (1.22). Druhý případ by se ukázal analogicky.

Předpokládejme, že úloha (1.22) má optimální řešení.
Naším cílem je ukázat neprázdnost množiny

$$\left\{ y \,:\, A^\top y \leq c,\; b^\top y \geq \gamma^*,\; y \geq \mathbf{0},\; y \in \mathbb{R}^m \right\}. \tag{1.35}$$

To je ekvivalentní s tím ukázat neprázdnost množiny

$$\left\{ (y,u,w) \,:\, A^\top y + u = c,\; b^\top y - w = \gamma^*,\; y \geq \mathbf{0},\; u \geq \mathbf{0},\; w \geq \mathbf{0},\; y \in \mathbb{R}^m,\; u \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.36}$$

Podle Farkasovy věty, tj. věty 1.11, je to ekvivalentní se splněním podmínky

$$\forall\, \mu \in \mathbb{R}^n,\; \nu \in \mathbb{R} : \quad \begin{pmatrix} A^\top & \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ b^\top & \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{musí být} \quad \begin{pmatrix} c^\top & \gamma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \geq 0. \tag{1.37}$$

Po rozepsání dostaneme podmínku

$$\forall\, \mu \in \mathbb{R}^n,\; \nu \in \mathbb{R} : \quad A\mu + \nu b \geq 0,\; \mu \geq \mathbf{0},\; -\nu \geq \mathbf{0} \quad \text{musí být} \quad c^\top \mu + \gamma^* \nu \geq \mathbf{0}. \tag{1.38}$$

Musíme tedy ověřit podmínku (1.38).
Vezměme proto $\mu \in \mathbb{R}^n$ a $\nu \in \mathbb{R}$ takové, že $A\mu + \nu b \geq 0$, $\mu \geq \mathbf{0}$, $-\nu \geq \mathbf{0}$.

1. Nechť $\nu = 0$.

   Pak $A\mu \geq \mathbf{0}$, $\mu \geq \mathbf{0}$. Tudíž $\mu \in \mathsf{direct}\,(\mathbf{M})$. Úloha (1.22) má optimální řešení a tak podle věty 1.32 platí $c^\top\mu \geq \mathbf{0}$. Což je v tomto případě $c^\top\mu + \gamma^*\nu \geq \mathbf{0}$.

2. Nechť $\nu < 0$.

   Pak $A\mu + \nu b \geq 0$, $\mu \geq \mathbf{0}$, nebo-li $A\frac{\mu}{|\nu|} \geq b$, $\mu \geq \mathbf{0}$. To znamená, že $\frac{\mu}{|\nu|} \in \mathbf{M}$.

   Úloha (1.22) má optimální řešení a γ^* je její optimální hodnota.

   Proto $c^\top\frac{\mu}{|\nu|} \geq \gamma^*$. Odtud $c^\top\mu - \gamma^*|\nu| = c^\top\mu + \gamma^*\nu \geq \mathbf{0}$.

Podle věty 1.11 je množina (1.36) neprázdná. Proto také (1.35) je neprázdná.
Tím jsme ukázali, že úloha (1.23) má optimální řešení a $\gamma^* = \delta^*$.

Q.E.D.

Věta 1.40 (o komplementaritě): *Nechť $x \in \mathbf{M}$ a $y \in \mathbf{N}$. Pak x je optimální řešení úlohy (1.20) a y je optimální řešení úlohy (1.21) tehdy a jen tehdy, splňují-li podmínky komplementarity (1.31), (1.32).*

Důkaz: Pokud $x \in \mathbf{M}$ a $y \in \mathbf{N}$, pak věta 1.37 říká, že splnění podmínek komplementarity (1.31), (1.32) je nutné a postačující k tomu, aby $x \in \mathbf{M}^*$ a $y \in \mathbf{N}^*$.
Nemusíme tedy nic nového dokazovat.

Q.E.D.

Shrňme zjištěná fakta do jedné věty.

Věta 1.41: *Pro danou dvojici duálních úloh (1.20), (1.21) nastává právě jedna ze čtyř možností:*

1. $\mathbf{M} = \emptyset$, $\mathbf{N} = \emptyset$, $\gamma^* = +\infty$, $\delta^* = -\infty$, *tj. ani jedna z úloh (1.20), (1.21) nemá přípustné řešení.*
2. $\mathbf{M} \neq \emptyset$, $\mathbf{M}^* = \emptyset$, $\mathbf{N} = \emptyset$, $\gamma^* = \delta^* = -\infty$, *tj. úloha (1.20) má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení, a úloha (1.21) nemá přípustné řešení.*
3. $\mathbf{M} = \emptyset$, $\mathbf{N} \neq \emptyset$, $\mathbf{N}^* = \emptyset$, $\gamma^* = \delta^* = +\infty$, *tj. úloha (1.20) nemá přípustné řešení a úloha (1.21) má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení.*
4. $\mathbf{M} \neq \emptyset$, $\mathbf{M}^* \neq \emptyset$, $\mathbf{N} \neq \emptyset$, $\mathbf{M}^* \neq \emptyset$, $\gamma^* = \delta^* \in \mathbb{R}$, *tj. obě úlohy (1.20), (1.21) mají optimální řešení a jejich optimální hodnoty jsou si rovny. Navíc, když $\hat{x} \in \mathbf{M}^*$ a $\hat{y} \in \mathbf{N}^*$, pak splňují podmínky komplementarity (1.31), (1.32).*

Důkaz: Věta pouze shrnuje tvrzení vět 1.37, 1.38, 1.39, 1.40.

Q.E.D.

Příklad 1.42: Uvažujme dvojici symetrických duálních úloh

$$\begin{array}{llcccc} \text{minimalizovat} & x_1 & + & x_2, & & \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 1, \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & \frac{3}{2}, \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array} \tag{1.39}$$

$$\begin{array}{llcccc} \text{maximalizovat} & y_1 & + & \frac{3}{2}y_2, & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1, \\ & y_1 & + & y_2 & \leq & 1, \\ & \multicolumn{5}{l}{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.} \end{array} \tag{1.40}$$

Vyřešme graficky úlohu (1.40). Optimálním řešením je $\hat{y}_1 = 1$, $\hat{y}_2 = 0$ a optimální hodnota účelové funkce je rovna 1. Úloha (1.40) je tedy degenerovaná.

Pro vyřešení úlohy (1.39) využijeme komplementarity.

△

K obecné úloze lineárního programování je jednoznačně přiřazena úloha, která s ní tvoří dvojici duálních úloh. Sestavení příslušné úlohy lze dělat zcela mechanicky. Vhodnou pomůckou k tomu může být sestavení „ tabulky“, jak je ukázáno v následujícím příkladě.

Příklad 1.43: K dané úloze lineárního programování můžeme přiřadit příslušnou úlohu do duální dvojice pomocí tabulky. Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{lccccccc} \text{minimalizovat} & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3, & & \\ & 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & \geq & 4, \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3, \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2, \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}.} \end{array} \tag{1.41}$$

Sestavíme tabulku

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	≥ 0	$\in \mathbb{R}$		
		3	6	-1	$\geq$	4
		2	-3	2	$\leq$	3
		1	-2	4	$=$	2
						max
		2	-1	3	min	

Do řádků omezení přidáme duální proměnné a pomocí pravidla, že při „ min“ převádíme $\geq \leftrightarrow \geq$, $\leq \leftrightarrow \leq$, $= \leftrightarrow \in \mathbb{R}$, a při „ max“ převádíme $\leq \leftrightarrow \geq$, $\geq \leftrightarrow \leq$, $\in \mathbb{R} \ \leftrightarrow =$, tabulku doplníme

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	≥ 0	$\in \mathbb{R}$		
y_1	≥ 0	3	6	-1	$\geq$	4
y_2	≤ 0	2	-3	2	$\leq$	3
y_3	$\in \mathbb{R}$	1	-2	4	$=$	2
		$\leq$	$\leq$	$=$		max
		2	-1	3	min	

Čteme-li tabulku po sloupcích dostáváme úlohu

$$\begin{array}{lccccccc} \text{maximalizovat} & 4y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3, & & \\ & 3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \leq & 2, \\ & 6y_1 & - & 3y_2 & - & 2y_3 & \leq & -1, \\ & -y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & = & 3, \\ & \multicolumn{7}{l}{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, y_3 \in \mathbb{R}.} \end{array} \tag{1.42}$$

která je duální úlohou k úloze (1.41).

△

1.6 Ekonomická interpretace duality

Dvojici duálních úloh lze sestavit na základě ekonomické úvahy. Mají přirozenou ekonomickou interpretaci. Ukažme si to na příkladech, které přejímáme z [3], kapitola 3.7.

1.6.1 Dopravní problém

Uvažujme uvolněný dopravní problém

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j} \\ \text{za podmínek} & \sum_{j=1}^m x_{i,j} \le a_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^n x_{i,j} \ge b_j \quad \forall\, j = 1, \dots, m, \\ & x_{i,j} \ge 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m, \end{array} \tag{1.43}$$

kde pro množství a_i disponibilního zboží v místech i a pro množství b_j požadovaná v místech j platí

$$\begin{aligned} & a_i \ge 0 \text{ pro každé } i = 1, \dots, n, \\ & b_j \ge 0 \text{ pro každé } j = 1, \dots, m, \\ & \sum_{i=1}^n a_i \ge \sum_{j=1}^m b_j\,. \end{aligned}$$

Připomeňme ještě, že při standardní interpretaci vyjadřují čísla $c_{i,j}$ náklady na dopravu jednotkového množství zboží z místa i do místa j. Každé přípustné řešení $x_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ reprezentuje přepravní plán o celkových nákladech $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j}$; dále kapitola 4.

V úloze máme dvě skupiny omezení. Označíme duální proměnné odpovídající podmínkám první skupiny u_i a duální proměnné odpovídající podmínkám druhé skupiny v_j. Získáme tak duální úlohu ve tvaru

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizovat} & \sum\limits_{i=1}^n a_i u_i + \sum\limits_{j=1}^m b_j v_j \\ \text{za podmínek} & u_i + v_j \le c_{i,j} \quad \forall\, i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m, \\ & u_i \le 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n, \\ & v_j \ge 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, m. \end{array} \tag{1.44}$$

Náklady $c_{i,j}$ představují finanční prostředky a tak je přirozené interpretovat u_i a v_j také jako finanční prostředky.

Uvažujme dvě organizace, pojmenujme je Dopravce a Zprostředkovatel. Dopravce má za úkol přepravu zrealizovat. Dopravce dostane od Zprostředkovatele následující nabídku: „ Odkoupíme od vás zboží v místech i za cenu $-u_i$ a v místech j vám je za cenu v_j prodáme zpět. “

Je zřejmé, že takovouto nabídku by měl Dopravce přijmout, neboť podle slabé věty o dualitě platí

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{j=1}^m b_j v_j \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j}\,.$$

To znamená, že Dopravce zaplatí Zprostředkovateli nejvýše tolik, kolik by ho stála vlastní doprava.

Cílem Dopravce je uskutečnit rozvoz komodity při co nejnižších nákladech. Cílem Zprostředkovatele je nabídnout zprostředkování rozvozu za co nejvyšší cenu. Oba jsou samozřejmě svázáni podmínkami zadání. Úvahu končíme zjištěním, že Dopravce řeší úlohu (1.43) a Zprostředkovatel řeší úlohu (1.44).

1.6.2 Směšovací problém

Uvažujme směšovací problém sestavení krmné směsi se zadaným minimálním obsahem živin

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} x_i \geq b_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, m, \\ & x_i \geq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n, \end{array} \tag{1.45}$$

kde

- $A_{j,i}$ značí množství j-té živiny v jednotkovém množství i-té krmné suroviny,
- b_j značí minimální obsah j-té živiny v sestavené krmné směsi,
- c_i značí cenu jednotkového množství i-té krmné suroviny.

Představme si, že kromě surovin je možné na trhu kupovat přímo jednotlivé živiny. Jak ale optimálně stanovit ceny živin na trhu, aby dodavatel živin mohl úspěšně konkurovat dodavatelům surovin? Uvážíme-li, že v jedné jednotce i-té krmné suroviny dodávané za cenu c_i jsou jednotlivé živiny obsaženy v množstvích $A_{1,i}$, $A_{2,i}$,..., $A_{m,i}$, je rozumné stanovit ceny y_1, y_2, ..., y_m tak, aby

$$y_1 A_{1,i} + y_2 A_{2,i} + \ldots + y_m A_{m,i} \leq c_i.$$

Živiny jsou zapotřebí alespoň v množstvích b_1, b_2, ..., b_m. Při uvedených cenách dodavatel živin získá alespoň částku

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m.$$

Dodavatel živin tedy řeší úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizovat} & \sum\limits_{j=1}^{m} b_j y_j \\ \text{za podmínek} & \sum\limits_{j=1}^{m} A_{j,i} y_j \leq c_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n, \\ & y_j \geq 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{1.46}$$

Úloha (1.46), kterou řeší prodejce živin je duální k úloze (1.45).

1.6.3 Stabilita úlohy LP

Označme si

$$\begin{aligned} &\gamma(b,c) = \\ &= \min\left\{ c^\top x \,:\, A_{I_1\times J} x \geq b_{I_1},\ A_{I_2\times J} x \leq b_{I_2},\ A_{I_3\times J} x = b_{I_3},\ x_{J_1} \geq \mathbf{0},\ x_{J_2} \leq \mathbf{0}, x \in \mathbb{R}^J \right\}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned} &\delta(b,c) = \\ &\max\left\{ b^\top y \,:\, \left(A_{I\times J_1}\right)^\top y \leq c_{J_1},\ \left(A_{I\times J_2}\right)^\top y \geq c_{J_2},\ \left(A_{I\times J_3}\right)^\top y = c_{J_3},\ y_{I_1} \geq \mathbf{0},\ y_{I_2} \leq \mathbf{0}, y \in \mathbb{R}^I \right\}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Množiny přípustných řešení označíme po řadě $\mathbf{M}(b)$, $\mathbf{N}(c)$ a množiny optimálních řešení $\mathbf{M}^*(b,c)$, $\mathbf{N}^*(b,c)$. Dále

$$\mathcal{M} = \left\{ b \in \mathbb{R}^I \,:\, \mathbf{M}(b) \neq \emptyset \right\}, \tag{1.49}$$

$$\mathcal{N} = \left\{ c \in \mathbb{R}^J \,:\, \mathbf{N}(c) \neq \emptyset \right\}. \tag{1.50}$$

Tvrzení 1.44 *Pro optimální hodnoty dvojice duálních úloh (1.47), (1.48) platí*

1. *Pro* $c \in \mathcal{N}$ *je* $\gamma(\bullet, c) = \delta(\bullet, c)$ *a jde o funkci konvexní.*
2. *Pro* $b \in \mathcal{M}$ *je* $\gamma(b, \bullet) = \delta(b, \bullet)$ *a jde o funkci konkávní.*
3. *Když* $b \notin \mathcal{M}$, $c \notin \mathcal{N}$, *pak* $\gamma(b, c) = +\infty$ *a* $\delta(b, c) = -\infty$.

Tvrzení 1.45 *Pro dvojici duálních úloh (1.47), (1.48) platí následující odhady*

1. *Pro* $b \in \mathcal{M}$, $c \in \mathcal{N}$ *a* $\widehat{y} \in \mathbf{N}^*(b, c)$ *platí:*
$$\gamma(b + \Delta, c) = \delta(b + \Delta, c) \geq b^\top \widehat{y} + \Delta^\top \widehat{y} \qquad \forall \Delta \in \mathbb{R}^I.$$
2. *Pro* $b \in \mathcal{M}$, $\Delta \in \mathbb{R}^I$, *takové, že* $b + \Delta \in \mathcal{M}$, $c \in \mathcal{N}$ *a* $\widehat{y} \in \mathbf{N}^*(b, c)$, $\widehat{z} \in \mathbf{N}^*(b + \Delta, c)$ *platí:*
$$\gamma(b + \lambda\Delta, c) = \delta(b + \lambda\Delta, c) \leq b^\top \widehat{y} + \lambda\Delta^\top \widehat{z} \qquad \forall \lambda \in [0, 1].$$
3. *Pro* $b \in \mathcal{M}$, $c \in \mathcal{N}$ *a* $\widehat{x} \in \mathbf{M}^*(b, c)$ *platí:*
$$\gamma(b, c + \Delta) = \delta(b, c + \Delta) \leq c^\top \widehat{x} + \Delta^\top \widehat{x} \qquad \forall \Delta \in \mathbb{R}^J.$$
4. *Pro* $b \in \mathcal{M}$, $c \in \mathcal{N}$, $\Delta \in \mathbb{R}^J$, *takové, že* $c + \Delta \in \mathcal{N}$ *a* $\widehat{x} \in \mathbf{M}^*(b, c)$, $\widehat{z} \in \mathbf{M}^*(b, c + \Delta)$ *platí:*
$$\gamma(b, c + \lambda\Delta) = \delta(b, c + \lambda\Delta) \geq c^\top \widehat{x} + \lambda\Delta^\top \widehat{z} \qquad \forall \lambda \in [0, 1].$$

1.6.4 Dualita a Farkasova věta

Dualita úloh lineárního programování a Farkasova věta jsou ekvivalentní. V tomto textu jsme postupovali tak, že jsme nejdříve dokázali Farkasovu větu a s její pomocí pak dualitu. Chceme-li z platnosti duality ukázat Farkasovu větu je třeba si uvědomit následující řetězec ekvivalencí.

Příklad 1.46: Uvědomme si, že následující úlohy jsou ekvivalentní:

- Existuje nezáporné řešení úlohy $Ax = b$.
- Úloha $\min\left\{\mathbf{0}^\top x \,:\, Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$ má optimální řešení.
- Úloha $\max\left\{\mathbf{0}^\top x \,:\, Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$ má optimální řešení.

Zapojením Farkasovy věty a duality tyto úlohy doplníme ještě o další tři úlohy, které jsou s nimi ekvivalentní:

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}^m$ splňující $A^\top y \geq \mathbf{0}$ musí být $b^\top y \geq 0$.
- Úloha $\max\left\{b^\top y \,:\, A^\top y \leq \mathbf{0},\ y \in \mathbb{R}^m\right\}$ má optimální řešení.
- Úloha $\min\left\{b^\top y \,:\, A^\top y \geq \mathbf{0},\ y \in \mathbb{R}^m\right\}$ má optimální řešení.

$\triangle$

1.7 Simplexová metoda

V této kapitole se seznámíme s algoritmy, které umožňují vyřešit danou úlohu lineárního programování.

Obecnou úlohu lineárního programování musíme nejdříve přetransformovat do standardního tvaru

$$\min\left\{c^\top x\ :\ Ax=b,\ x\geq \mathbf{0},\ x\in\mathbb{R}^J\right\}, \tag{1.51}$$

kde $c\in\mathbb{R}^J$, $A\in\mathbb{R}^{I\times J}$, $b\in\mathbb{R}^I$.

Navíc požadujeme, aby matice A měla plnou řádkovou hodnost; tj. $\mathrm{h}\left(A\right)=\mathrm{card}\left(I\right)$. (1.52)

Víme, že obecnou úlohu lineárního programování lze převést na tvar (1.51). Pak jsou dvě možnosti.

- Když $\mathrm{h}\left(A|b\right)=\mathrm{h}\left(A\right)$, pak lze vynecháním vhodných řádků úlohu převést na tvar (1.51), který splňuje (1.52).
- Když $\mathrm{h}\left(A|b\right)>\mathrm{h}\left(A\right)$, pak uvažovaná úloha nemá přípustné řešení.

K úloze (1.51) přísluší duální úloha

$$\max\left\{b^\top y\ :\ A^\top y\leq c,\ y\in\mathbb{R}^I\right\}. \tag{1.53}$$

Zavedeme následující terminologii.

Definice 1.47 *Nechť úloha (1.51) splňuje (1.52) a $L\subset J$.*

i) L se nazývá báze úlohy (1.51), jestliže matice $A_{I\times L}$ je regulární.

ii) Když L je báze, pak vektor $x\left(L\right)\in\mathbb{R}^J$ splňující $\mathcal{N}\left(x\left(L\right)\right)=J\setminus L$, $A_{I\times L}x\left(L\right)_L=b$ nazveme bazické primární řešení (úlohy (1.51) příslušné bázi L).

iii) Když L je báze a $x\left(L\right)$ je přípustným řešením úlohy (1.51), tj. $x\left(L\right)\geq 0$, pak říkáme, že L je primárně přípustná báze.

iv) Když L je báze a $x\left(L\right)$ je optimálním řešením úlohy (1.51), pak říkáme, že L je optimální báze.

v) Když L je báze, pak vektor $y\left(L\right)\in\mathbb{R}^I$ splňující $A_{I\times L}^\top y\left(L\right)=c_L$ nazveme bazické duální řešení (úlohy (1.51) příslušné bázi L).

vi) Když L je báze a $y\left(L\right)$ je přípustným řešením úlohy (1.53), tj. $A^\top y\left(L\right)\leq c$, pak říkáme, že L je duálně přípustná báze.

Uvědomme si, že báze L jednoznačně určuje, jak bazické primární řešení $x\left(L\right)$, tak i bazické duální řešení $y\left(L\right)$. Je tomu tak proto, že obě jsou řešením soustavy rovnic s regulární maticí soustavy.

Lemma 1.48 *Nechť úloha (1.51) splňuje (1.52) a $x\in\mathbb{R}^J$. Pak x je krajním řešením úlohy (1.51) tehdy a jen tehdy, existuje-li L primárně přípustná báze úlohy (1.51) taková, že $x=x\left(L\right)$.*

Důkaz:

1. Nechť x je krajním řešením úlohy (1.51).
   Pak matice $A_{I\times\mathcal{P}(x)}$ má plnou sloupcovou hodnost a $A_{I\times\mathcal{P}(x)}x_{\mathcal{P}(x)}=b$.
   Matice A má plnou řádkovou hodnost a tak lze nalézt $L\supset\mathcal{P}\left(x\right)$ tak, že matice $A_{I\times L}$ je regulární.
   Pak L je báze úlohy (1.51) a platí $A_{I\times L}x_L=b$, $A_{I\times L}x\left(L\right)_L=b$.
   Odtud $x=x\left(L\right)$, protože $A_{I\times L}$ je regulární a oba vektory mají složky s indexy mimo bázi L nulové.
   Tudíž L je primárně přípustná báze a $x=x\left(L\right)$.

2. Nechť L je primárně přípustná báze.
   Pak $x(L)$ je přípustné řešení úlohy (1.51) a matice $A_{I\times\mathcal{P}(x(L))}$ má plnou sloupcovou hodnost.
   Jinými slovy, $x(L)$ je krajním bodem úlohy (1.51).

Q.E.D.

Věta 1.49: *Když L je báze úlohy (1.51), která je primárně i duálně přípustná, pak $x(L)$ je optimálním řešením úlohy (1.51) a $y(L)$ je optimálním řešením úlohy (1.53).*

Důkaz: Víme, že $x(L)$ je přípustným řešením úlohy (1.51) a $y(L)$ je přípustným řešením úlohy (1.53).
Vektory $x(L)$, $y(L)$ splňují podmínku komplementarity.
Odtud, $x(L)$ je optimálním řešením úlohy (1.51) a $y(L)$ je optimálním řešením úlohy (1.53).

Q.E.D.

Věta 1.50: *Nechť úloha (1.51) splňuje (1.52) a je nedegenerovaná. Pak je následující ekvivalentní:*

i) Úloha (1.51) má optimální řešení.

ii) Existuje optimální báze úlohy (1.51).

iii) Existuje báze úlohy (1.51), která je primárně i duálně přípustná.

Důkaz:

1. Když má úloha (1.51) optimální řešení, pak podle věty 1.32 existuje krajní bod $\hat{x} \in \mathbf{M}$, který je optimálním řešením úlohy (1.51).
   Úloha (1.51) je nedegenerovaná a tak je matice $A_{I\times\mathcal{P}(\hat{x})}$ regulární.
   Pak $L = \mathcal{P}(\hat{x})$ je báze úlohy (1.51) a $x(L) = \hat{x}$.
   Tudíž L je optimální báze úlohy (1.51).

2. Nechť L je optimální báze úlohy (1.51).
   Pak $x(L)$ je optimálním řešením úlohy (1.51).
   Podle věty 1.41 má také úloha (1.53) optimální řešení $\hat{y} \in \mathbf{N}$ a pro optimální řešení jsou splněny podmínky komplementarity (1.31), (1.32).
   Úloha (1.51) je nedegenerovaná a tak $x(L)_L > 0$.
   Tudíž z podmínky (1.31) dostáváme, že $(A_{I\times L})^\top \hat{y} = c_L$.
   L je báze a tak řešení této soustavy je jednoznačně určeno. Je jím příslušné bazické duální řešení.
   To znamená $\hat{y} = y(L)$ a báze L je primárně i duálně přípustná.

3. Nechť L je primárně i duálně přípustná báze úlohy (1.51).
   Pak $x(L)$ je přípustným řešením úlohy (1.51) a $y(L)$ je přípustným řešením úlohy (1.53).
   Podle věty 1.32 má úloha (1.51) optimální řešení.

Q.E.D.

1.7.1 Simplexová metoda

Předchozí pozorování nám umožňuje numericky vyřešit zadanou úlohu lineárního programování (1.51). Hlavní myšlenky tohoto postupu pojmenujeme jako simplexová metoda:

1. Nalezení primárně přípustného bazického řešení.
2. Postupně po hranách množiny přípustných řešení přecházíme od jednoho primárně přípustného bazického řešení k druhému. Postupujeme tak, aby hodnota účelové funkce klesala.
3. Postup se po konečně krocích zastaví s primárně přípustným bazickým řešením, jehož báze je zároveň duálně přípustná. Nalezli jsme tedy optimální bazické řešení úlohy (1.51).

Nebo duálně:

1. Nalezení duálně přípustného bazického řešení.
2. Postupně po hranách množiny přípustných řešení duální úlohy přecházíme od jednoho primárně přípustného bazického řešení k druhému. Postupujeme tak, aby hodnota účelové funkce duální úlohy vzrůstala.
3. Postup se po konečně krocích zastaví s duálně přípustným bazickým řešením, jehož báze je zároveň primárně přípustná. Nalezli jsme tedy optimální bazické řešení úlohy (1.51).

Nyní konkretizujme uvedený postup:

Simplexový algoritmus

KROK 0: Najdeme $L_0 \subset J$ primárně přípustnou bázi úlohy (1.51) a jdeme na **KROK 1**. Pokud žádná primárně přípustná báze úlohy (1.51) neexistuje, pak jdeme na **END 1**.

KROK 1: Mějme primárně přípustnou bázi $L_t \subset J$.
Spočteme $\delta^\top = \left(c_{L_t}\right)^\top \left(A_{I\times L_t}\right)^{-1} A - c^\top \in \mathbb{R}^J$.
Když $\delta \leq 0$, pak jdi na **END 2**, jinak jdi na **KROK 2**.

KROK 2: Najdeme index $j \in J$ takový, že $\delta_j > 0$, a spočteme vektor $\rho = \left(A_{I\times L_t}\right)^{-1} A_{I\times\{j\}}$.
Když $\rho \leq 0$, pak přejdeme na **END 3**, jinak pokročíme na **KROK 3**.

KROK 3: Najdeme index $i \in L_t$, $\rho_i > 0$ takový, aby

$$\frac{x\left(L_t\right)_i}{\rho_i} = \min\left\{\frac{x\left(L_t\right)_u}{\rho_u} \;:\; \rho_u > 0,\ u \in L_t\right\}. \tag{1.54}$$

Provedeme změnu báze $L_{t+1} = L_t \cup \{j\} \setminus \{i\}$. Pak je L_{t+1} primárně přípustná báze.
Zvýšíme $t := t+1$ a přejdeme na **KROK 1**.

END 1: Úloha (1.51) nemá žádné přípustné řešení.

END 2: Vektor $x\left(L_t\right)$ je optimálním řešením úlohy (1.51) a $y\left(L_t\right)$ je optimálním řešením úlohy (1.53).

END 3: Účelová funkce úlohy (1.51) neomezeně klesá na polopřímce $x\left(L_t\right) + t\Delta$, $t \geq 0$, kde

$$\begin{array}{rcrl} \Delta_u & = & -\rho_u & \text{pro} \quad u \in L_t, \\ & = & 1 & \text{pro} \quad u = j, \\ & = & 0 & \text{pro} \quad u \in J \setminus \left(L_t \cup \{j\}\right). \end{array}$$

.

◇

Věta 1.51: *Když je úloha (1.51) nedegenerovaná, pak se simplexový algoritmus po konečně krocích zastaví. Buď zjistí, že úloha (1.51) nemá přípustné řešení, nebo najde optimální bázi úlohy (1.51), případně nalezne směr v kterém účelová funkce úlohy (1.51) neomezeně klesá.*

Důkaz: Abychom dokázali konečnost simplexového algoritmu, musíme projít jednotlivé jeho kroky.

1. Podle vět 1.26, 1.19 a lemmatu 1.48 víme, že úloha (1.51) má přípustné řešení tehdy a jen tehdy existuje-li primárně přípustná báze úlohy (1.51).
   Proto když neexistuje primárně přípustná báze, pak **KROK 0** končí zjištěním, že úloha (1.51) nemá žádné přípustné řešení.

2. V **KROK 1** se rozhodujeme podle rozhodovacího řádku δ.
   Když $\delta \le 0$, pak podle definice je L_t duálně přípustná báze. Víme, že L_t je také primárně přípustná báze.
   Podle věty 1.50 jsme našli optimální bázi úlohy (1.51) a tím pádem $x\,(L_t)$ je optimálním řešením úlohy (1.51).

3. V **KROK 2** je již vybráno $j \in J$ takové, že $\delta_j > 0$, a $\rho = (A_{I\times L_t})^{-1} A_{I\times\{j\}}$.

   Zaveďme vektor $\Delta \in \mathbb{R}^n$ předpisem

   $$\begin{array}{rcrll} \Delta_u & = & -\rho_u & \text{pro} & u \in L_t, \\ & = & 1 & \text{pro} & u = j, \\ & = & 0 & \text{pro} & u \in J \setminus (L_t \cup \{j\}). \end{array}$$

   Pro $t \ge 0$ označme $\xi(t) = x\,(L_t) + t\Delta$.

   Když $\rho \le 0$, pak dosazením zjistíme, že pro každé $t \ge 0$ je splněno

   $$\begin{array}{rcl} \xi(t) & \ge & 0, \\ A\,\xi(t) & = & Ax\,(L_t) - tA_{I\times L_t}\rho + tA_{I\times\{j\}} \\ & = & b - tA_{I\times L_t}(A_{I\times L_t})^{-1}A_{I\times\{j\}} + tA_{I\times\{j\}} = b, \\ c^\top\xi(t) & = & c^\top x\,(L_t) - tc_{L_t}^\top\rho + tc_j = c^\top x\,(L_t) - tc_{L_t}^\top(A_{I\times L_t})^{-1}A_{I\times\{j\}} + tc_j \\ & = & c^\top x\,(L_t) - t\delta_j. \end{array}$$

   To znamená, že polopřímka $\{\xi(t) : t \ge 0\}$ leží celá v množině přípustných řešení úlohy (1.51) a účelová funkce na ní neomezeně klesá.

   Ověřili jsme, že pro $\rho \le 0$ nastává situace popsaná v **END 3**.

4. V **KROK 3** je již vybráno $j \in J$ a $i \in L_t$ takové, že $\delta_j > 0$, $\rho_i > 0$ a je splněna podmínka (1.54). Označíme $L_{t+1} = L_t \cup \{j\} \setminus \{i\}$.

   Matice $A_{I\times L_{t+1}}$ je regulární neboť matice $W = (A_{I\times L_t})^{-1}A_{I\times L_{t+1}}$ je regulární. K tomu si stačí uvědomit, že

   $$W \in \mathbb{R}^{L_t\times L_{t+1}},\ W_{L_t\times(L_{t+1}\cap L_t)} = \mathbb{I}_{L_t\times(L_{t+1}\cap L_t)} \text{ a } W_{L_t\times\{j\}} = \rho.$$

   Jedná se tedy o jednotkovou matici v níž je i-tý sloupec nahrazen sloupcem ρ. Matice je proto regulární, jelikož $W_{i,j} = \rho_i > 0$. Tudíž L_{t+1} je báze.

Z konstrukce víme, že pro každé $0 \leq t \leq \frac{x(L_t)_i}{\rho_i}$ je splněno

$$\begin{aligned} \xi(t) &\geq 0, \\ A\,\xi(t) &= b, \\ c^\top \xi(t) &= c^\top x(L_t) - t\delta_j. \end{aligned}$$

Navíc platí $\mathcal{P}\left(\xi\left(\frac{x(L_t)_i}{\rho_i}\right)\right) \subset L_{t+1}$. Tudíž $x(L_{t+1}) = \xi\left(\frac{x(L_t)_i}{\rho_i}\right)$.
Hodnota účelové funkce pro toto bazické řešení splňuje

$$c^\top x(L_{t+1}) = c^\top x(L_t) - \frac{x(L_t)_i}{\rho_i}\delta_j < c^\top x(L_t).$$

Poslední nerovnost je ostrá, protože úloha (1.51) je nedegenerovaná.

Zjistili jsme, že nová báze je opět primárně přípustná a hodnota účelové funkce klesne. Můžeme se tedy s ní vrátit na **KROK 1**.

Ukázali jsme, že jednotlivé kroky algoritmu jsou v pořádku.
Ještě je třeba si uvědomit, že máme k dispozici pouze konečný počet primárně přípustných bází.
Při přechodu k nové bázi v **KROK 3** se hodnota účelové funkce vždy zmenší.
Po konečně průchodů přes **KROK 3** dosáhneme minimální hodnotu účelové funkce na bazických primárních řešeních. Pak již nebude možno najít další vhodnou bázi. Algoritmus proto musí po konečně krocích najít optimální řešení nebo směr v kterém účelová funkce neomezeně klesá.

Q.E.D.

Simplexový algoritmus můžeme realizovat v tabulce 1.1.

			$c^\top$
c_{L_t}	L_t	$(A_{I\times L_t})^{-1}b$	$(A_{I\times L_t})^{-1}A$
		$(c_{L_t})^\top (A_{I\times L_t})^{-1}b$	$(c_{L_t})^\top (A_{I\times L_t})^{-1}b - c^\top$

Tabulka 1.1: Simplexová tabulka

Přechod od jedné báze k druhé není pak nic jiného nežli Gaussova eliminace s podmínkami, jak vybírat klíčový prvek podle něhož se tabulka transformuje.
Spočtěme si na ukázku jeden příklad.

Příklad 1.52: Podnik vyrábí tři výrobky, na jejich výrobu potřebuje tři úzkoprofilové suroviny. Výchozí údaje jsou uvedeny v tabulce.

Surovina	Spotřeba suroviny na výrobek			Množství
	V_1	V_2	V_3	
S_1	20	10	40	80
S_2	40	0	20	10
S_3	0	10	40	40
Jednotkový zisk	400	100	800	

(1.55)

Úkolem je stanovit výrobní program, při kterém se nepřekročí stanovená množství surovin a zabezpečí se maximální zisk podniku. Jedná se o úlohu LP ve tvaru

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{maximalizovat} & 400x_1 & + & 100x_2 & + & 800x_3 & & \\
\text{za podmínek} & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 40x_3 & \leq & 80, \\
 & 40x_1 & + & & + & 20x_3 & \leq & 10, \\
 & & + & 10x_2 & + & 40x_3 & \leq & 40, \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0\,,\; x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0\,.}
\end{array}
\tag{1.56}
$$

Po zkrácení, doplnění skluzových proměnných a změně znaménka koeficientů v účelové funkci dostáváme úlohu

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{minimalizovat} & -400x_1 & - & 100x_2 & - & 800x_3 & & & & & & \\
\text{za podmínek} & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & \hat{s}_1 & & & = & 8, \\
 & 4x_1 & & & + & 2x_3 & & & + \; \hat{s}_2 & & = & 1, \\
 & & & x_2 & + & 4x_3 & & & & + \; \hat{s}_3 & = & 4, \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1 \geq 0\,,\; x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0\,,\; \hat{s}_1 \geq 0,\; \hat{s}_2 \geq 0,\; \hat{s}_3 \geq 0\,.}
\end{array}
\tag{1.57}
$$

Tato úloha je minimalizační úlohou LP ve standardním tvaru. Můžeme ji vyřešit pomocí simplexového algoritmu.

Do počáteční báze zařadíme skluzové proměnné $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$. Sestavme tabulku a počítejme. Zvolený prvek v rozhodovacím řádku (index h v **KROK 2**) je označen zeleným rámečkem, klíčový prvek zvolený podle **KROK 3** červeným rámečkem.

			−400	−100	−800	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	$\hat{s}_1$	$\hat{s}_2$	$\hat{s}_3$
0	$\hat{s}_1$	8	2	1	4	1	0	0
0	$\hat{s}_2$	1	4	0	$\boxed{2}$	0	1	0
0	$\hat{s}_3$	4	0	1	4	0	0	1
		0	400	100	$\boxed{800}$	0	0	0

			−400	−100	−800	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	$\hat{s}_1$	$\hat{s}_2$	$\hat{s}_3$
0	$\hat{s}_1$	6	−6	1	0	1	−2	0
−800	x_3	$\frac{1}{2}$	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	$\hat{s}_3$	2	−8	$\boxed{1}$	0	0	−2	1
		−400	−1200	$\boxed{100}$	0	0	−400	0

			−400	−100	−800	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	$\hat{s}_1$	$\hat{s}_2$	$\hat{s}_3$
0	$\hat{s}_1$	4	2	0	0	1	0	−1
−800	x_3	$\frac{1}{2}$	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
−100	x_2	2	−8	1	0	0	−2	1
		−600	−400	0	0	0	−200	−100

Simplexovým algoritmem jsme našli optimální řešení $\left(0\ 2\ \frac{1}{2}\ 4\ 0\ 0\right)^\top$ pro úlohu (1.57). To znamená, že původní úloha (1.56) má optimální řešení: $\left(0\ 2\ \frac{1}{2}\right)^\top$, zisk podniku je 600 a na skladě podniku zůstane 40 jednotek suroviny S_1.

Optimální výrobní plán můžeme prezentovat zadavateli, takto: nevyrábět výrobek V_1, vyrobit 2 jednotky výrobku V_2 a vyrobit $\frac{1}{2}$ jednotky výrobku V_3. Ve skladě podniku zůstane 40 jednotek suroviny S_1, které nebyly při výrobě použity.

Duální úloha k úloze (1.56) má řešení $(0, 10, 20)^\top$.

$\triangle$

1.7.2 Dvojfázový simplexový algoritmus

Problémem simplexového algoritmu je nalezení počáteční báze v **KROK 0**. Jednou z možností, jak nalézt počáteční primárně přípustnou bázi, je sestavení pomocné úlohy a její vyřešení pomocí simplexového algoritmu. Takto pracuje následující algoritmus.

Dvojfázový simplexový algoritmus

1.fáze: Nejdříve řešíme pomocnou úlohu

$$\min\left\{\sum_{k\in K} z_t\ :\ Ax + Qz = b,\ x \geq \mathbf{0},\ z \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^J,\ z \in \mathbb{R}^K\right\}. \tag{1.58}$$

Pomocné proměnné z a matice Q jsou přidány tak, aby vznikla báze $V = \{v_i, i \in I\} \subset J \cup K$ s vlastností, že pro každé $i \in I$ je

$$\begin{aligned}(A|Q)_{v_i} &= \mathbb{I}_{I\times\{i\}} \quad \text{pokud } b_i > 0,\\ &= -\mathbb{I}_{I\times\{i\}} \quad \text{pokud } b_i < 0,\\ &\in \left\{\mathbb{I}_{I\times\{i\}},\ -\mathbb{I}_{I\times\{i\}}\right\} \quad \text{pokud } b_i = 0.\end{aligned}$$

Úlohu (1.58) vyřešíme simplexovým algoritmem. Jako počáteční bázi použijeme bázi V.

Víme, že úloha (1.58) má přípustné řešení a hodnota její účelové funkce je nezáporná pro všechna přípustná řešení. Proto podle věty 1.15 má úloha (1.58) optimální řešení.

Simplexový algoritmus proto nalezne optimální bázi úlohy (1.58). Nyní jsou dvě možnosti. Buď je optimální hodnota kladná nebo nulová.

Když je optimální hodnota kladná, tak to znamená, že úloha (1.51) nemá přípustné řešení a algoritmus končí tímto zjištěním.

Když je optimální hodnota nulová, tak to znamená, že úloha (1.51) má přípustné řešení a algoritmus pokračuje **druhou fází**.

2.fáze: Pokud je úloha (1.58) nedegenerovaná, pak simplexový algoritmus v **první fázi** nalezne optimální bázi W, která neobsahuje žádnou pomocnou proměnnou z. Pokud by totiž některá pomocná proměnná zůstala v optimální bázi, pak by měla kladnou hodnotu a optimální hodnota úlohy (1.58) by byla kladná.

Pokud je úloha (1.58) degenerovaná, pak simplexový algoritmus v **první fázi** nalezne optimální bázi, která může obsahovat některou z pomocných proměnných z. Hodnota těchto proměnných je však nutně nulová. Pak, díky předpokladu o plné sloupcové hodnosti matice A, lze pro každou takovou proměnnou z vždy najít proměnnou z J, která má v řádku příslušejícím z nenulové číslo. Tuto proměnnou zařadíme do báze místo z. Vznikne tak W optimální báze úlohy (1.58), která již žádnou pomocnou proměnnou neobsahuje.

Nyní simplexovým algoritmem vyřešíme úlohu (1.51). Jako počáteční bázi použijeme bázi W. Uvědomme si, že prakticky začínáme s tabulkou, kterou jsme získali v první fázi algoritmu. Pouze jsme vyškrtli sloupce příslušející pomocným proměnným a koeficienty v účelové funkci pomocné úlohy jsme nahradili koeficienty v účelové funkci úlohy (1.51).

$\diamondsuit$

Pro ilustraci si spočtěme příklad.

Příklad 1.53: Řešme dvoufázovým simplexovým algoritmem úlohu

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimalizovat} & -x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 15 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 20 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\
\end{array}
\qquad (1.59)
$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

V první fázi řešíme pomocnou úlohu

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\text{minimalizovat} & z_1 & + & z_2 & & & & & & & & & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & z_1 & & & = & 15 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & & & + & z_2 & = & 20 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 10 \\
\end{array}
\qquad (1.60)
$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0.$$

Do báze zařadíme proměnné z_1, z_2, x_4. Sestavme tabulku a počítejme. Zvolený prvek v rozhodovacím řádku je označen zeleným obdélníkem. Zvolený klíčový prvek červeným obdélníkem.

			0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2
1	z_1	15	1	2	3	0	1	0
1	z_2	20	2	1	$\boxed{5}$	0	0	1
0	x_4	10	1	2	1	1	0	0
		35	3	3	$\boxed{8}$	0	0	0

			0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2
1	z_1	3	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	0	1	$-\frac{3}{5}$
0	x_3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$
0	x_4	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$
		3	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	0	0	$-\frac{8}{5}$

			0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2
0	x_2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$
0	x_3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
0	x_4	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$
		0	0	0	0	0	-1	-1

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. V nalezené optimální bázi pomocné úlohy se nevyskytují žádné pomocné proměnné **z**. Máme tedy přípustnou bázi původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

			-1	0	-3	1
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0
-3	x_3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0
1	x_4	$\frac{15}{7}$	$\boxed{\frac{6}{7}}$	0	0	1
		$-\frac{60}{7}$	$\boxed{\frac{4}{7}}$	0	0	0

			-1	0	-3	1
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$
-3	x_3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
-1	x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$
		-10	0	0	0	$-\frac{2}{3}$

Optimálním řešením zadané úlohy je vektor $\left(\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ 0\right)^\top$, optimální hodnota je 10 a duální úloha má řešení $\left(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top$.

$\triangle$

1.7.3 Duální simplexový algoritmus

Nyní se seznámíme s algoritmem, který řeší úlohu (1.51) hledáním optimálního řešení duální úlohy.

Duální simplexový algoritmus

KROK 0: Najdeme $L_0 \subset J$ duálně přípustnou bázi úlohy (1.51) a jdeme na **KROK 1**. Pokud žádná duálně přípustná báze úlohy (1.51) neexistuje, pak jdeme na **END 1**.

KROK 1: Mějme duálně přípustnou bázi $L_t \subset J$.
Spočteme $x(L_t)$.
Když $x(L_t) \geq 0$, pak jdi na **END 2**, jinak jdi na **KROK 2**.

KROK 2: Najdeme index $i \in L_t$ takový, že $x(L_t)_i < 0$, a spočteme vektor $\tau^\top = \left((A_{I\times L_t})^{-1}A\right)_{\{i\}\times J}$.

Když $\tau \geq \mathbf{0}$, pak přejdeme na **END 3**, jinak spočteme $\delta^\top = (c_{L_t})^\top (A_{I\times L_t})^{-1}A - c^\top \in \mathbb{R}^J$ a pokročíme na **KROK 3**.

KROK 3: Najdeme index $j \in J \setminus L_t$, $\tau_j < 0$ takový, že

$$\frac{\delta_j}{\tau_j} = \min \left\{ \frac{\delta_u}{\tau_u} \, : \, \tau_u < 0, \;\; u \in J \setminus L_t \right\}.$$

Provedeme změnu báze $L_{t+1} = L_t \cup \{j\} \setminus \{i\}$. Pak je L_{t+1} duálně přípustná báze.
Zvýšíme $t := t + 1$ a přejdeme na **KROK 1**.

END 1: Úloha (1.51) nemá optimální řešení. Nevíme však, zda je to proto, že nemá žádné přípustné řešení, nebo proto, že její infimum je $-\infty$.

END 2: Vektor $x\,(L_t)$ je optimálním řešením úlohy (1.51) a $y\,(L_t)$ je optimálním řešením úlohy (1.53).

END 3: Úloha (1.51) nemá žádné přípustné řešení a úloha (1.53) má neomezený extrém.

$\diamondsuit$

Definice 1.54 *Úloha (1.51) je duálně nedegenerovaná, pokud pro každou duálně přípustnou bázi L platí*

$$\begin{aligned} A^\top y\,(L)_j - c_j &= 0 \;\; \textit{pro } j \in L \\ &< 0 \;\; \textit{pro } j \in J \setminus L. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Věta 1.55: *Když je úloha (1.51) duálně nedegenerovaná, pak se duální simplexový algoritmus po konečně krocích zastaví. Buď nalezne optimální bázi úlohy (1.51) nebo zjistí, že úloha (1.51) nemá optimální řešení, popřípadě nemá žádné přípustné řešení.*

Důkaz: Abychom dokázali konečnost duálního simplexového algoritmu, musíme projít jednotlivé jeho kroky.

1. Když neexistuje žádná duálně přípustná báze pro úlohu (1.51), pak podle věty 1.50 nemá úloha (1.51) žádné optimální řešení.
   Proto když neexistuje duálně přípustná báze, pak **KROK 0** končí zjištěním, že úloha (1.51) nemá žádné optimální řešení.

2. V **KROK 1** se rozhodujeme podle bazického primárního řešení $x\,(L_t)$.
   Když $x\,(L_t) \geq 0$, pak podle definice je L_t primárně přípustná báze. Víme, že L_t je také duálně přípustná báze.
   Podle věty 1.50 jsme našli optimální bázi úlohy (1.51) a tím pádem $x\,(L_t)$ je optimálním řešením úlohy (1.51).

3. V **KROK 2** se rozhodujeme podle rozhodovacího řádku τ.
   Když $\tau \geq \mathbf{0}$, pak jdeme na **END 3**.

   Označme $\tilde{y}(t) = y\,(L_t) - t\left((A_{I\times L_t})^{-1}\right)^\top_{I\times\{i\}}$.

   Dosazením zjistíme, že

$$\begin{aligned} A^\top \tilde{y}(t) &= A^\top y\,(L_t) - tA^\top \left(A^{-1}_{I\times L_t}\right)^\top_{I\times\{i\}} \\ &= A^\top y\,(L_t) - t\tau \leq A^\top y\,(L_t) \leq c, \\ b^\top \tilde{y}(t) &= b^\top y\,(L_t) - tb^\top \left(A^{-1}_{I\times L_t}\right)^\top_{I\times\{i\}} = b^\top y\,(L_t) - tx\,(L_t)_i\,. \end{aligned}$$

   To znamená, že polopřímka $\tilde{y}(t)$, $t \geq 0$ leží v množině přípustných řešení úlohy (1.53) a účelová funkce na ní neomezeně roste.

4. V **KROK 3** přecházíme k nové bázi.
Ukážeme, že nová báze je opět duálně přípustná a hodnota účelové funkce stoupne.
Nejdříve spočteme

$$A^\top \tilde{y}\left(\frac{\delta_j}{\tau_j}\right) = A^\top y\left(L_t\right) - \frac{\delta_j}{\tau_j} A^\top \left(A^{-1}_{I\times L_t}\right)^\top_{I\times\{i\}} = A^\top y\left(L_t\right) - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau = \delta + c - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau.$$

Rozepsáno po složkách

$$\begin{aligned}\left[A^\top \tilde{y}\left(\frac{\delta_j}{\tau_j}\right)\right]_u &= \delta_u + c_u - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau_u \le c_u \quad \text{pro } u \in J \setminus \left(L_t \cup \{j\}\right),\ \tau_u \ge \mathbf{0},\\ &= \delta_u + c_u - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau_u \le c_u \quad \text{pro } u \in J \setminus \left(L_t \cup \{j\}\right),\ \tau_u < 0,\\ &= \delta_j + c_j - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau_j = c_j \quad \text{pro } u = j,\\ &= \delta_u + c_u - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau_u = c_u \quad \text{pro } u \in L_t \setminus \{i\},\\ &= \delta_i + c_i - \frac{\delta_j}{\tau_j}\tau_i \le c_i \quad \text{pro } u = i.\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že L_{t+1} je duálně přípustná báze a $y\left(L_{t+1}\right) = \tilde{y}\left(\frac{\delta_j}{\tau_j}\right)$. Nyní vypočteme příslušnou hodnotu účelové funkce

$$b^\top y\left(L_{t+1}\right) = b^\top y\left(L_t\right) - \frac{\delta_j}{\tau_j} b^\top \left(A^{-1}_{I\times L_t}\right)^\top_{I\times\{i\}} = b^\top y\left(L_t\right) - \frac{\delta_j}{\tau_j} x\left(L_t\right)_i > b^\top y\left(L_t\right).$$

Poslední nerovnost je ostrá, protože úloha (1.51) je duálně nedegenerovaná.
Nová báze je opět duálně přípustná a tak s ní můžeme pokračovat na **KROK 1**.

Ukázali jsme, že jednotlivé kroky algoritmu jsou v pořádku.
Ještě je třeba si uvědomit, že máme k dispozici pouze konečný počet duálně přípustných bází.
Při přechodu k nové bázi v **KROK 3** se hodnota účelové funkce vždy zvýší.
Po konečně průchodů přes **KROK 3** dosáhneme maximální hodnotu účelové funkce na bazických duálních řešeních. Pak již nebude možno najít další vhodnou bázi. Algoritmus proto musí po konečně krocích najít optimální řešení nebo směr v kterém účelová funkce úlohy (1.53) neomezeně roste.

Q.E.D.

Použití duálního simplexového algoritmu si ukážeme na příkladě.

Příklad 1.56: Pomocí duálního simplexového algoritmu řešme úlohu

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{minimalizovat} & 15x_1 & + & 10x_2, & & & & & & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & = & 36, \\ & 3x_1 & + & 10x_2 & & & - & x_4 & & & = & 60, \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & & & & & - & x_5 & = & 40, \end{array}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Jako počáteční bázi zvolíme $L_0 = \{x_3, x_4, x_5\}$. Sestavením simplexové tabulky pro tuto bázi zjistíme, že je duálně přípustná. Můžeme proto počítat duálním simplexovým algoritmem.

			15	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-36	-2	-3	1	0	0
0	x_4	$\boxed{-60}$	-3	$\boxed{-10}$	0	1	0
0	x_5	-40	-5	-2	0	0	1
		0	-15	-10	0	0	0

			15	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-18	$-\frac{11}{10}$	0	1	$-\frac{3}{10}$	0
10	x_2	6	$\frac{3}{10}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	0
0	x_5	$\boxed{-28}$	$\boxed{-\frac{22}{5}}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	1
		60	-12	0	0	-1	0

Optimálním řešení této úlohy je bod $\left(\frac{48}{11}, \frac{100}{11}, 0, 44, 0\right)$ a optimální hodnota účelové funkce je $\frac{1720}{11}$.

$\triangle$

1.7.4 Úprava algoritmů pro degenerované úlohy

V případě degenerace můžeme použít jeden ze dvou následujících přístupů, které zajistí, že simplexový algoritmus zkonverguje.

Znáhodněný simplexový algoritmus

Úlohu řešíme simplexovým algoritmem. Při nejednoznačnosti výběru proměnné, která bude z báze vyřazena, zvolíme mezi kandidáty náhodně.

Znáhodnění nám zaručí, že s pravděpodobností jedna znáhodněný simplexový algoritmus po konečně krocích zkonverguje.

$\diamondsuit$

Perturbovaný simplexový algoritmus

Druhým používaným postupem je perturbace původní úlohy. Postupuje se tak, že pro každé $\varepsilon > 0$ uvažujme perturbovanou úlohu

$$\min\left\{c^\top x \,:\, Ax = b + A\left(\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n\right)^\top,\ x \geq \mathbf{0},\ x \in \mathbb{R}^J\right\}, \tag{1.62}$$

Když existuje $L \subset J$ primárně přípustná báze úlohy (1.51), pak existuje takové přeuspořádání proměnných a $\varepsilon_0 > 0$, že pro všechna $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ je úloha (1.62) nedegenerovaná a primárně přípustné báze úlohy (1.51) jsou primárně přípustné báze úlohy (1.62).

			15	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$\boxed{-11}$	0	0	1	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{4}$
10	x_2	$\frac{45}{11}$	0	1	0	$-\frac{5}{44}$	$\frac{3}{44}$
15	x_1	$\frac{70}{11}$	1	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{5}{22}$
		$\frac{1500}{11}$	0	0	0	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{30}{11}$

			15	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	44	0	0	-4	1	1
10	x_2	$\frac{100}{11}$	0	1	$-\frac{5}{11}$	0	$\frac{2}{11}$
15	x_1	$\frac{48}{11}$	1	0	$\frac{2}{11}$	0	$-\frac{3}{11}$
		$\frac{1720}{11}$	0	0	$-\frac{20}{11}$	0	$-\frac{25}{11}$

Přečíslování je jednoduché. Stačí pouze umístit proměnné odpovídající bázi L jako první. Na pořadí zbylých proměnných již nezáleží.
Úlohu řešíme simplexovým algoritmem. Při nejednoznačnosti výběru proměnné, která má být z báze vyřazena, se rozhodujeme pomocí perturbovaných úloh (1.62) pro malá kladná ε.

V tabulce algoritmus funguje tak, že když při vyřazování z báze máme více kandidátů, tak zjistíme podíly prvního sloupce matice $A^{-1}_{I\times L_t}A$ a klíčového sloupce ρ. Najdeme minimum mezi všemi těmito podíly. Jako kandidáty na vyřazení z báze uvažujeme pak pouze ty předchozí kandidáty, pro které se tohoto minima nabývá. Když je kandidátů stále více, pak redukujeme jejich počet pomocí dalšího sloupce. Tak pokračujeme dále dokud nezbude pouze jeden kandidát. Protože předpokládáme (1.52), tak k jednoznačnému určení proměnné, která opustí bázi, musí tímto postupem dojít.

Poznamenejme, že vždy existuje takové přeuspořádání proměnných, že perturbovaný simplexový algoritmus po konečně krocích zkonverguje.

$\diamondsuit$

Těmito dvěma postupy lze také odstranit problém s duální degenerací úlohy při použití duálního simplexového algoritmu.

Znáhodněný duální simplexový algoritmus

Úlohu řešíme duálním simplexovým algoritmem. Při nejednoznačnosti výběru proměnné, která bude do báze zařazena, zvolíme mezi kandidáty náhodně.

Znáhodnění nám zaručí, že s pravděpodobností jedna znáhodněný duální simplexový algoritmus po konečně krocích zkonverguje.

$\diamondsuit$

Perturbovaný duální simplexový algoritmus

Pro každé $\varepsilon > 0$ uvažujme perturbovanou úlohu

$$\min\left\{\left(c^\top + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots,\ \varepsilon^m)A^\top\right) x \;:\; Ax = b,\ x \geq \mathbf{0},\ x \in \mathbb{R}^J\right\}. \tag{1.63}$$

Úlohu řešíme duálním simplexovým algoritmem. Při nejednoznačnosti výběru proměnné, která bude do báze vyřazena, se rozhodujeme pomocí perturbovaných úloh (1.63) pro malá kladná ε.

V tabulce algoritmus funguje tak, že když při zařazování do báze máme více kandidátů, tak zjistíme podíly prvního řádku matice $(A_{I\times L_t})^{-1}A$ a klíčového řádku τ. Najdeme minimum mezi všemi těmito podíly. Jako kandidáty na zařazení do báze uvažujeme pak pouze ty předchozí kandidáty, pro které se tohoto minima nabývá. Když je kandidátů stále více, pak redukujeme jejich počet pomocí dalšího řádku. Tak pokračujeme dále dokud nezbude pouze jeden kandidát. Protože předpokládáme (1.52), tak k jednoznačnému určení proměnné, která vstoupí do báze, musí tímto postupem dojít.

$\diamondsuit$

Kapitola 2

Teorie nelineárního programování

V této kapitole se budeme zabývat obecnou úlohou nelineárního programování NLP ve tvaru:

$$\min \{ f(x) \,:\, g_j(x) \le 0\,,\ j = 1, \dots, m\,,\ h_k(x) = 0,\ k = 1, \dots, p\,,\ x \in \mathbb{R}^n \}\,, \tag{2.1}$$

kde funkce f, g_j, $j = 1, \dots, m$, h_k, $k = 1, \dots, p$ jsou definované na celém $\mathbb{R}^n$ a mají hodnoty v rozšířené reálné přímce $\mathbb{R}^*$. Budeme označovat $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, p\}$.

Seznámíme se s technikou, která umožňuje takovouto úlohu řešit. Bude však nutné se omezit pouze na vhodnou množinu, na které mají všechny uvažované funkce pouze reálné hodnoty, případně konečné parciální derivace.

Množinu přípustných řešení úlohy (2.1) budeme i zde označovat standardním symbolem

$$\mathbf{M} = \{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, g_j(x) \le 0\,,\ j = 1, \dots, m\,,\ h_k(x) = 0,\ k = 1, \dots, p \}\,. \tag{2.2}$$

Hlavní myšlenkou řešení úloh nelineárního programování je jejich „ uvolnění“. Omezení rozdělíme na „ nehezká“, označme jejich indexy $I_1 \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $J_1 \subset \{1, 2, \dots, p\}$, a „ hezká“, označme jejich indexy $I_2 \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $J_2 \subset \{1, 2, \dots, p\}$. Rozdělení musí být samozřejmě disjunktní a vyčerpávající, tj. $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, m\}$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, $J_1 \cup J_2 = \{1, 2, \dots, p\}$. „ Nehezká“ omezení začleníme jako penále za jejich nesplnění do účelové funkce. Takto upravenou účelovou funkci minimalizujeme pouze přes „ hezká“ omezení.

Přesněji to znamená, že pro úlohu (2.1) vybereme vhodnou množinu $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ a označíme

$$\widehat{\mathsf{M}} = \{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, g_j(x) \le 0\,,\ j \in I_2\,,\ h_k(x) = 0,\ k \in J_2 \}\,. \tag{2.3}$$

Množina $\widetilde{\mathsf{M}}$ představuje vhodný definiční obor pro funkce, které se v úloze vyskytují. Pokud budeme využívat derivací, budeme vyžadovat, aby $\widetilde{\mathsf{M}}$ byla otevřená a všechny funkce byly na ní diferencovatelné.

Dále definujeme Lagrangeovu funkci

$$\mathsf{L}\,(x; u, v) = f(x) + \sum_{j \in I_1} u_j g_j(x) + \sum_{k \in J_1} v_k h_k(x). \tag{2.4}$$

na množině $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.

Naším cílem je nastavit penalizaci $u \in \mathbb{R}_+^{I_1}$ a $v \in \mathbb{R}^{J_1}$ tak, abychom vyřešením úlohy

$$\min \left\{ \mathsf{L}\,(x; u, v) \,:\, x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}} \right\} \tag{2.5}$$

vyřešili úlohu (2.1).

V části výkladu budeme uvažovat takto obecné dělení omezení na dvě části a ve zbytku pak pouze zařazení všech omezení do účelové funkce. Pro úlohy s podmínkou nezápornosti, pak zařadíme nezápornost mezi „ hezká“ omezení.

2.1 Vázaný extrém

Nejdříve si připomeneme úlohu o vázaném extrému, se kterou se setkáváme na přednášce z matematické analýzy.

Úlohou je nalézt lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na množině

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h_k(x) = 0\,,\ k = 1, \ldots, m\}\,, \tag{2.6}$$

kde jsou všechny funkce f, h_k, $k = 1, \ldots, m$ diferencovatelné.

Úloha se řeší pomocí Lagrangeovy funkce

$$\mathsf{L}\,(x; \lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k h_k(x). \tag{2.7}$$

Geometricky lze množinu M interpretovat jako nadplochu v $\mathbb{R}^n$. Speciálně, když jsou h_k, $k = 1, \ldots, m$ lineární funkce, jako nadrovinu.

Definice 2.1 *Řekneme, že bod $x^0 \in M = \{x : h_k(x) = 0,\ k = 1, \ldots, m\}$ je regulární bod M, jestliže funkce h_k, $k = 1, \ldots, m$ jsou definovány na nějakém okolí bodu x_0, všechny jsou diferencovatelné v bodě x_0 a je splněno:*

i) $h_k(x^0) = 0,\ k = 1, \ldots, m.$

ii) Vektory $\nabla_x h_k(x^0)\,,\ k = 1, \ldots, m$ jsou lineárně nezávislé, tj.

$$\textit{matice} \quad \left(\frac{\partial h_k(x^0)}{\partial x_i}\right)_{i=1,k=1}^{n,m} \quad \textit{má hodnost } m. \tag{2.8}$$

Vlastnost regularity je vlastností zápisu množiny M, nikoli M samotné (srovnej s dualitou).

Příklad 2.2: Definujme $h(x_1, x_2) = x_1$ a nechť $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\}$.
Tedy $M = \{(0, x_2) \,:\, x_2 \in \mathbb{R}\}$, což je osa x_2.
Pak pro libovolné $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je $\nabla_x h(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$.
Potom každý bod takto zapsané množiny M je regulární.

Zapíšeme-li však $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$, kde $g(x) = x_1^2$, pak $\nabla_x g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pak ovšem $\nabla_x g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pro každé $x \in M$ a tedy žádný bod množiny M není regulární.

△

Věta 2.3 (Nutná podmínka pro vázaný extrém): *Nechť v bodě x^* je lokální extrém funkce f vzhledem k množině $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h_k(x) = 0,\ k = 1, \ldots, m\}$, f, h_k, $k = 1, \ldots, m$ jsou definovány na nějakém okolí bodu x^* a všechny jsou diferencovatelné v bodě x^*.*

Když x^* je regulární bod M, pak existuje vektor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ takový, že

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla_x f(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \nabla_x h_k(x^*) = 0.$$

2.2 Globální podmínky optimality

V této kapitole budeme uvažovat obecné rozdělení omezení na „ hezká“ a „ nehezká“. Pouze budeme vyžadovat, aby bylo alespoň jedno nehezké omezení vybráno. Jinak by totiž k žádné změně původní úlohy nedošlo.

Zaveďme globální podmínky optimality.

Definice 2.4 *Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$, $u^* \in \mathbb{R}^{I_1}$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$ a $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$. Řekneme, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje globální podmínky optimality (GPO) pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, jestliže trojice (x^*, u^*, v^*) je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce (2.4) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, to znamená, že*

$$x^* \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}\,,\ u^* \in \mathbb{R}^{I_1}\,,\ u^* \geq 0,\ v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$$

a pro všechna $x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$, $u \in \mathbb{R}^{I_1}$, $u \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^{J_1}$ platí

$$\mathsf{L}(x; u^*, v^*) \geq \mathsf{L}(x^*; u^*, v^*) \geq \mathsf{L}(x^*; u, v)\,. \tag{2.9}$$

Věta 2.5 (GPO $\Rightarrow$ NLP): *Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ a $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je taková, že všechny funkce vystupující v úloze (2.1) mají na $\widetilde{\mathsf{M}}$ pouze reálné hodnoty. Když existují $u^* \in \mathbb{R}^{I_1}$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$ tak, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, pak je x^* globální minimum úlohy (2.1).*

Navíc je splněna podmínka komplementarity pro NLP: $\sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) = 0$.

Důkaz: Podle předpokladu je $x^* \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$. Dosazením do (2.9) dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) + \sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x) + \sum_{k \in J_1} v_k^* h_k(x) \quad &\geq \quad f(x^*) + \sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) + \sum_{k \in J_1} v_k^* h_k(x^*) \geq \\ &\geq \quad f(x^*) + \sum_{j \in I_1} u_j g_j(x^*) + \sum_{k \in J_1} v_k h_k(x^*). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nerovnosti (2.10) podle předpokladu platí pro nějaké $u^* \in \mathbb{R}^{I_1}$, $u^* \geq 0$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$ a pro všechna $x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$, $u \in \mathbb{R}^{I_1}$, $u \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^{J_1}$.

Použijeme nejprve pravou větev (2.10), tj. nerovnost

$$\sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) + \sum_{k \in J_1} v_k^* h_k(x^*) \geq \sum_{j \in I_1} u_j g_j(x^*) + \sum_{k \in J_1} v_k h_k(x^*) \quad \forall u \in \mathbb{R}^{I_1}\,,\ u \geq 0, v \in \mathbb{R}^{J_1}. \tag{2.11}$$

Uvědomíme si, že $h_k(x^*)$ jsou pevné koeficienty a u^*, v^* jsou z hlediska uvažované nerovnosti také pevné vektory. Odtud přímo vyplývá, že (2.11) může platit jen když

$$\begin{aligned} g_j(x^*) \leq 0 \qquad & \text{pro každé } j \in I_1, \\ h_k(x^*) = 0 \qquad & \text{pro každé } k \in J_1, \\ \sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) \quad = \quad & 0. \end{aligned}$$

To znamená, že x^* je přípustné řešení úlohy (2.1), je splněna komplementarita a že se levá větev nerovností (2.10) redukuje na

$$f(x) + \sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x) + \sum_{k \in J_1} v_k^* h_k(x) \geq f(x^*) \quad \forall\ x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}. \tag{2.12}$$

Omezme se jen na přípustná x, tj. $g_j(x) \leq 0$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$, $h_k(x) = 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, p$. Pak z nerovnosti (2.12) plyne $f(x) \geq f(x^*)$ pro každé $x \in \mathbf{M}$, tedy optimalita x^* pro úlohu (2.1).

Q.E.D.

Opačná implikace obecně neplatí. Je třeba splnit jistou podmínku regularity. Pro úlohu konvexního programování stačí uvažovat Slaterovu podmínky regularity.

Definice 2.6 *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina. Nechť funkce $f, g_j, j = 1, \dots, m,\ h_k, k = 1, \dots, p$ jsou definovány na $\widetilde{\mathsf{M}}$ a funkce $h_k, k = 1, \dots, p$ jsou navíc diferencovatelné na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Řekneme, že pro úlohu (2.1) je splněna Slaterova podmínka regularity, jestliže existuje $\widetilde{x} \in \mathbf{M}$ takový, že $g_j(\widetilde{x}) < 0$ pro všechna $j = 1, \dots, m$ a vektory $\nabla_x h_k(\widetilde{x})\,,\ k = 1, \dots, p$ jsou lineárně nezávislé, tj.*

$$\textit{matice} \quad \left(\frac{\partial h_k(\widetilde{x})}{\partial x_i}\right)_{i=1,k=1}^{n,p} \quad \textit{má hodnost } p.$$

Věta 2.7 (NLP $\Rightarrow$ GPO): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená konvexní množina, funkce $f, g_j, j = 1, \dots, m$ mají reálné hodnoty a jsou konvexní na $\widetilde{\mathsf{M}}$ a funkce $h_k, k = 1, \dots, p$ jsou lineární (tedy definované na celém $\mathbb{R}^n$). Dále předpokládejme, že úloha (2.1) splňuje Slaterovu podmínku, viz definice 2.6.*

Když x^* je globální minimum úlohy (2.1), potom existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $u^* \geq 0$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$. Tato trojice pak automaticky splňuje podmínku komplementarity pro NLP, tj. $\sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) = 0$.

Důkaz: Nebudeme konstruovat u^*, v^*, ale dokážeme jejich existenci, a to přes větu o oddělitelnosti množin. Zaveďme dvě množiny:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ \zeta \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \eta \in \mathbb{R}\,,\ \xi \in \mathbb{R}^{J_1}\,,\ \zeta \in \mathbb{R}^{I_1}, \text{ pro která existuje } x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}} \text{ tak, že} \\ \eta \geq f(x)\,,\ \xi_j \geq g_j(x)\,,\ j \in I_1\,,\ \zeta_k = h_k(x)\,,\ k \in J_1 \end{array} \right\}, \\
\mathcal{B} &= \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ \zeta \end{pmatrix} : \eta \in \mathbb{R}\,,\ \xi \in \mathbb{R}^{J_1}\,,\ \zeta \in \mathbb{R}^{I_1}\,,\ \eta < f(x^*)\,,\ \xi < 0\,,\ \zeta = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

1. Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je konvexní.

   Nechť $\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \xi^1 \\ \zeta^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta^2 \\ \xi^2 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, $\lambda \in (0,1)$ a označme $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \xi^1 \\ \zeta^1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} \eta^2 \\ \xi^2 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$.

   Pak existují $x^1, x^2 \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$ pro které platí

   $$\begin{aligned}
   \eta^1 \geq f(x^1)\,,\ \xi_j^1 \geq g_j(x^1)\,,\ j \in I_1\,,\ \zeta_k^1 = h_k(x^1)\,,\ k \in J_1, \\
   \eta^2 \geq f(x^2)\,,\ \xi_j^2 \geq g_j(x^2)\,,\ j \in I_1\,,\ \zeta_k^2 = h_k(x^2)\,,\ k \in J_1.
   \end{aligned}$$

   Množina $\widetilde{\mathsf{M}}$ je konvexní podle předpokladu a množina $\widehat{\mathsf{M}}$ je konvexní, neboť funkce g_j, $j \in J_2$ jsou konvexní a funkce h_k, $k \in I_2$ jsou lineární. Proto $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$.

   Z konvexnosti funkcí f, g_j, $j \in I_1$ a z linearity funkcí h_k, $k \in J_1$ platí

   $$\begin{aligned}
   \eta &= \lambda\eta^1 + (1-\lambda)\eta^2 \geq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \geq f(x), \\
   \xi_j &= \lambda\xi_j^1 + (1-\lambda)\xi_j^2 \geq \lambda g_j(x^1) + (1-\lambda) g_j(x^2) \geq g_j(x) \quad \forall j \in I_1, \\
   \zeta_k &= \lambda\zeta_k^1 + (1-\lambda)\zeta_k^2 = \lambda h_k(x^1) + (1-\lambda) h_k(x^2) = h_k(x) \quad \forall k \in J_1.
   \end{aligned}$$

   Tudíž $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ a tedy $\mathcal{A}$ je konvexní množina.

2. Ukážeme, že $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset$.

   Předpokládejme $\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\\ \zeta\end{pmatrix}\in\mathcal{B}\cap\mathcal{A}$.

   Pak by existovalo $x\in\widetilde{\mathsf{M}}\cap\widehat{\mathsf{M}}$ tak, že $f(x^*)>\eta\geq f(x)$, $g_j(x)\leq\xi_j<0$ pro $j\in I_1$ a $h_k(x)=0$ pro $k\in J_1$.

   To znamená, že by existovalo $x\in\mathbf{M}$ s vlastností $f(x^*)>f(x)$, což je ale spor s optimalitou x^*.

Podle věty o neostré oddělitelnosti konvexních množin, věta 3.15, existují $\alpha,\Delta\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}^{I_1}$, $\gamma\in\mathbb{R}^{J_1}$, $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ tak, že nadrovina $H=\left\{\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\\ \zeta\end{pmatrix}\ :\ \alpha\,\eta+\beta^\top\xi+\gamma^\top\zeta=\Delta\right\}$ neostře odděluje množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, tj. platí

$$\alpha\,\eta+\beta^\top\xi+\gamma^\top\zeta\geq\Delta\geq\alpha\,a+\beta^\top b\quad\forall\ \begin{pmatrix}\eta\\ \xi\\ \zeta\end{pmatrix}\in\mathcal{A},\ \begin{pmatrix}a\\ b\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\in\mathcal{B}. \tag{2.13}$$

Složky a a b mohou být libovolně záporné, proto $\alpha\geq 0$, $\beta\geq\mathbf{0}$. Jinak by totiž pravá strana nerovností mohla být libovolně velká kladná, což by znamenalo, že nerovnosti nelze splnit.

Pro $x\in\widetilde{\mathsf{M}}\cap\widehat{\mathsf{M}}$ je $\begin{pmatrix}f(x)\\ g_{I_1}(x)\\ h_{J_1}(x)\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$. Proto pro každé $\begin{pmatrix}a\\ b\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\in\mathcal{B}$ platí

$$\alpha f(x)+\sum_{j\in I_1}\beta_j g_j(x)+\sum_{k\in J_1}\gamma_k h_k(x)\geq\alpha\,a+\beta^\top b.$$

Odtud dostaneme nerovnost

$$\alpha f(x)+\sum_{j\in I_1}\beta_j g_j(x)+\sum_{k\in J_1}\gamma_k h_k(x)\geq\alpha f(x^*)\quad\forall\ x\in\widetilde{\mathsf{M}}\cap\widehat{\mathsf{M}}. \tag{2.14}$$

1. Ukážeme, že $\alpha>0$.

   Kdyby tomu tak nebylo, pak by $\alpha=0$ neboť již víme, že $\alpha\geq 0$. Pak by platilo

   $$\beta\geq\mathbf{0}\,,\ \begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}\quad\text{a}\quad\sum_{j\in I_1}\beta_j g_j(x)+\sum_{k\in J_1}\gamma_k h_k(x)\geq 0\quad\forall\ x\in\widetilde{\mathsf{M}}\cap\widehat{\mathsf{M}}.$$

   Ze Slaterovy podmínky však existuje $\widetilde{x}\in\mathbf{M}$ takové, že pro každé $j\in I$ je $g_j(\widetilde{x})<0$ a pro každé $k\in J$ je $h_k(\widetilde{x})=0$. Proto nutně $\beta=\mathbf{0}$.

   To však znamená, že

   $$\gamma\neq\mathbf{0}\quad\text{a}\quad\sum_{k\in J_1}\gamma_k h_k(x)\geq 0\quad\forall\ x\in\widetilde{\mathsf{M}}\cap\widehat{\mathsf{M}}.$$

   Funkce g_j, $j\in I$ jsou konvexní na otevřené množině $\widetilde{\mathsf{M}}$, jsou proto spojité na $\widetilde{\mathsf{M}}$.

   Víme, že pro každé $j\in I$ je $g_j(\widetilde{x})<0$. Proto existuje $\delta>0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(\widetilde{x})\subset\widetilde{\mathsf{M}}$ a platí

   $$\forall x\in\mathcal{U}_\delta(\widetilde{x})\,\forall j\in I\ \text{je}\ g_j(x)<0$$
   $$\sum_{k\in J_1}\gamma_k h_k(x)\geq 0\quad\forall\ x\in\mathcal{U}_\delta(\widetilde{x})\ \text{splňující}\ h_k(x)=0\ \text{pro všechna}\ k\in J_2.$$

Funkce h_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ jsou lineární a proto nutně

$$\sum_{k\in J_1} \gamma_k h_k(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathcal{U}_\delta\,(\widetilde{x}) \text{ splňující } h_k(x) = 0 \text{ pro všechna } k \in J_2.$$

Funkce h_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ jsou navíc lineárně nezávislé a tak pro každé $k \in J_1$ existuje $x^{(k)} \in \mathcal{U}_\delta\,(\widetilde{x})$ takový, že $h_k(x^{(k)}) \neq 0$ a $h_l(x^{(k)}) = 0$ pro všechna $l = 1, 2, \ldots, p$, $l \neq k$.

Proto $\gamma = \mathbf{0}$, což je ale spor.

Tudíž $\alpha > 0$.

2. Dále ukážeme komplementaritu.

   Bod x^* je přípustným řešením úlohy (2.1), tudíž musí platit $\sum_{j\in I_1} \beta_j g_j(x^*) \leq 0$. Zároveň však z vlastnosti (2.14) plyne $\sum_{j\in I_1} \beta_j g_j(x^*) \geq 0$.

   Tudíž $\sum_{j\in I_1} \beta_j g_j(x^*) = 0$.

Můžeme tedy nerovnost (2.14) vydělit α

$$f(x) + \sum_{j\in I_1} \frac{\beta_j}{\alpha} g_j(x) + \sum_{k\in J_1} \frac{\gamma_k}{\alpha} h_k(x) \geq f(x^*) \quad \forall\ x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}.$$

Označme $u^* = \frac{\beta}{\alpha}$, $v^* = \frac{\gamma}{\alpha}$. Pak $u^* \geq 0$ a platí

$$f(x) + \sum_{j\in I_1} u_j^* g_j(x) + \sum_{k\in J_1} v_k^* h_k(x) \geq f(x^*) \quad \forall\ x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}. \tag{2.15}$$

Víme, že platí $\sum_{j\in I_1} u_j^* g_j(x^*) = 0$ a $\sum_{j\in I_1} u_j g_j(x^*) \leq 0$ pro všechna $u \geq 0$. Můžeme proto přidat i druhou nerovnost

$$f(x^*) + \sum_{j\in I_1} u_j^* g_j(x^*) + \sum_{k\in J_1} v_k^* h_k(x^*) \geq f(x^*) + \sum_{j\in I_1} u_j g_j(x^*) + \sum_{k\in J_1} v_k h_k(x^*) \tag{2.16}$$
$$\forall\ u \in \mathbb{R}^{J_1}\,,\ u \geq 0\,,\ v \in \mathbb{R}^{I_1}.$$

Nerovnosti (2.15), (2.16) dohromady dávají (GPO).

Q.E.D.

2.3 Lokální minimum

V této kapitole budeme diskutovat problematiku lokálních minim.

Lokální minima budeme vyšetřovat tak, že splnění globálních podmínek optimality zavedených v předchozí kapitole budeme vyžadovat pouze na nějakém malém okolí podezřelého bodu.

Definice 2.8 *Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$, $u^* \in \mathbb{R}^{I_1}$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$ a $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$. Řekneme, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje lokálně globální podmínky optimality (lokGPO) pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\mathcal{U}_\delta\,(x^*) \cap \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.*

Věta 2.9 (lokGPO $\Rightarrow$ lokNLP): *Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ a $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je taková, že všechny funkce vystupující v úloze (2.1) mají na $\widetilde{\mathsf{M}}$ pouze reálné hodnoty. Když existují $u^* \in \mathbb{R}^{I_1}$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$ tak, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, pak je x^* lokální minimum úlohy (2.1).*

Navíc je splněna podmínka komplementarity pro NLP, tj. $\sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) = 0$.

Důkaz: Podle předpokladu existuje $\delta > 0$ takové, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\mathcal{U}_\delta(x^*) \cap \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.
Vezměme nějaké $0 < \varepsilon < \delta$ a do úlohy (2.1) přidejme omezení

$$\min\{f(x) : g_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, m,\ \|x - x^*\| \le \varepsilon,\ h_k(x) = 0,\ k = 1, \dots, p,\ x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.17}$$

Podmínku $\|x - x^*\| \le \varepsilon$ zařadíme mezi „ hezká“omezení. Pak zjistíme, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.17) v oboru $\left(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \left(\widehat{\mathsf{M}} \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x^*)\right)\right) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.
Podle věty 2.5 je x^* globální minimum úlohy (2.17).
To ale znamená, že x^* je lokální minimum úlohy (2.1).

Q.E.D.

Opačná implikace obecně neplatí. Platí například pro úlohu, která je lokálně konvexní a splňuje Slaterovu podmínku regularity.

Věta 2.10 (lokNLP $\Rightarrow$ lokGPO): *Nechť $x^* \in \mathbf{M}$, $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená konvexní množina a funkce f, g_j, $j = 1, \dots, m$, h_k, $k = 1, \dots, p$ mají reálné hodnoty na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(x^*) \subset \widetilde{\mathsf{M}}$, funkce $f, g_j, j = 1, \dots, m$ jsou konvexní na $\mathcal{U}_\delta(x^*)$ a funkce $h_k, k = 1, \dots, p$ jsou lineární na $\mathcal{U}_\delta(x^*)$. Dále předpokládejme, že úloha (2.1) splňuje Slaterovu podmínku s $\widetilde{x} \in \mathcal{U}_\delta(x^*)$, viz definice 2.6.*

Když x^* je lokální minimum úlohy (2.1), potom existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že (x^*, u^*, v^*) splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$. Tato trojice pak automaticky splňuje podmínku komplementarity pro NLP, tj. $\sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) = 0$.

Důkaz: Podle předpokladu je x^* lokální minimum úlohy (2.1).
Existuje proto $0 < \varepsilon < \delta$ takové, že x^* je globální minimum úlohy

$$\min\{f(x) : g_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, m,\ \|x - x^*\| \le \varepsilon,\ h_k(x) = 0,\ k = 1, \dots, p,\ x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.18}$$

Podmínku $\|x - x^*\| \le \varepsilon$ zařadíme mezi „ hezká“ omezení.
Pak podle věty 2.7 existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ taková, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.18) v oboru $\left(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \left(\widehat{\mathsf{M}} \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x^*)\right)\right) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$ a je splněna komplementarita.
Odtud (x^*, u^*, v^*) splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$ a je splněna komplementarita.

Q.E.D.

Vztah k úloze hledání globálního minima je následující.

Věta 2.11 (lokNLP $\Leftrightarrow$ NLP):

i) Když x^* je globální minimum úlohy (2.1), pak je také jejím lokálním minimem.

ii) Nechť $\mathbf{M}$ je konvexní množina, f je konvexní funkce. Potom, když x^* je lokální minimum úlohy (2.1), pak je také jejím globálním minimem.

Důkaz: První tvrzení plyne přímo z definice lokálního a globálního minima. Druhá část již byla ukázána jako věta 2.15.

Q.E.D.

Věta 2.12 (lokGPO $\Leftrightarrow$ GPO): *Nechť $x^* \in \mathbf{M}$, $u^* \in \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ a $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$.*

i) Když (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, potom splňuje pro úlohu (2.1) také (lokGPO)v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.

ii) Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je konvexní množina, funkce $f, g_j, j = 1, \ldots, m$ jsou konvexní na $\widetilde{\mathsf{M}}$ a funkce $h_k, k = 1, \ldots, p$ jsou lineární na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Když (x^*, u^*, v^*) splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, potom splňuje pro úlohu (2.1) také (GPO)v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.

Důkaz: První tvrzení plyne přímo z definice (GPO)a (lokGPO). Druhé tvrzení musíme dokázat.

Z definice (lokGPO)existuje $\delta > 0$ takové, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje (GPO)pro úlohu (2.1) v oboru $(\mathcal{U}_\delta(x^*) \cap \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$.
Vezměme $x \in \widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$.
Množina $\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$ je konvexní a tak celá úsečka spojující body x a x^* leží v $\widetilde{\mathsf{M}} \cap \widehat{\mathsf{M}}$.
Dále existuje $0 < \lambda < 1$ tak, že $y = \lambda x^* + (1 - \lambda)x \in \mathcal{U}_\delta(x^*)$.
Z předpokladů druhého tvrzení je Lagrangeova funkce L konvexní v x. Platí tedy

$$\mathsf{L}(x; u^*, v^*) \geq \mathsf{L}(y; u^*, v^*) \geq \mathsf{L}(x^*; u^*, v^*).$$

Tím je podmínka (GPO)ukázána, neboť druhá část nerovností je shodná s (lokGPO).

Q.E.D.

2.4 Lokální podmínky optimality pro úlohu NLP

V této kapitole budeme uvažovat úlohu (2.1) a všechna omezení začleníme do Lagrangeovy funkce. Nalezneme vhodnou otevřenou množinu $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ a budeme uvažovat Lagrangeovu funkci na $\widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p$, neboť $\widehat{\mathsf{M}} = \mathbb{R}^n$, jako

$$\mathsf{L}(x; u, v) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x) + \sum_{k=1}^{p} v_k h_k(x). \tag{2.19}$$

Budeme diskutovat lokální podmínky optimality.

Definice 2.13 *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina a funkce f, g_j, $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ mají reálné hodnoty a konečné parciální derivace na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Říkáme, že trojice $(x^*, u^*, v^*) \in \widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje lokální podmínky optimality (LPO) pro úlohu (2.1), jestliže platí*

i) přípustnost: $g_j(x^*) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ h_k(x^*) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, p$;

ii) komplementarita: $u^* \geq 0,\ \sum_{j=1}^m u_j^* g_j(x^*) = 0$;

iii) optimalita: $\nabla_x \mathsf{L}(x^*; u^*, v^*) = 0$.

Věta 2.14 (lokGPO $\Rightarrow$ LPO): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina a funkce f, g_j , $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ mají reálné hodnoty a konečné parciální derivace na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Když trojice $(x^*, u^*, v^*) \in \widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $\widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, potom splňuje (LPO)pro úlohu (2.1).*

Důkaz: Podle věty 2.9 je x^* lokální minimum úlohy (2.1). Tudíž jsou splněny podmínky i) i ii). Víme, že x^* je lokální minimum funkce $\mathsf{L}(\bullet; u^*, v^*)$ na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Funkce je diferencovatelná na $\widetilde{\mathsf{M}}$ a $\widetilde{\mathsf{M}}$ je otevřená množina. Proto musí být splněna podmínka iii).

Q.E.D.

Definujme několik pomocných pojmů.

Definice 2.15 *Pro bod $x \in \mathbf{M}$ definujeme množinu indexů aktivních omezení*

$$B(x) = \{j = 1, 2, \ldots, m : g_j(x) = 0\} \tag{2.20}$$

a množinu směrů Z

$$Z(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} z^\top \nabla_x g_j(x) \le 0\,,\ j \in B(x)\,, \\ z^\top \nabla_x h_k(x) = 0\,,\ k = 1, \ldots, p, \\ z^\top \nabla_x f(x) < 0 \end{array} \right\}. \tag{2.21}$$

Věta 2.16 (Základní věta o lokálních podmínkách optimality): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina a funkce f, g_j , $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ mají reálné hodnoty a konečné parciální derivace na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Vezměme $x^* \in \mathbf{M}$. Pak $Z(x^*) = \emptyset$ tehdy a jen tehdy, když existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje body ii) a iii) z definice 2.13.*

Důkaz: Víme, že $x^* \in \mathbf{M}$, a tak si stačí uvědomit následující řetězec ekvivalencí.

Existují $u^* \in \mathbb{R}^m_+$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že (x^*, u^*, v^*) splňuje ii) a iii).

$$\Updownarrow$$

Existují $u^* \in \mathbb{R}^m_+$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že (x^*, u^*, v^*) splňuje

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x^*) + \sum_{j=1}^m u_j^* \nabla_x g_j(x^*) + \sum_{k=1}^p v_k^* \nabla_x h_k(x^*) &= 0. \\ \sum_{j=1}^m u_j^* g_j(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

Existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $u^* \ge 0$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ splňující rovnice

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m u_j^* \nabla_x g_j(x^*) + \sum_{k=1}^p v_k^* \nabla_x h_k(x^*) &= -\nabla_x f(x^*), \\ \sum_{j=1}^m u_j^* g_j(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

Existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $u^* \geq 0$, $v^* \in \mathbb{R}^p$, $u_j^* = 0$ pro $j \notin B(x^*)$ splňující rovnice

$$\sum_{j \in B(x^*)} u_j^* \nabla_x g_j(x^*) + \sum_{k=1}^{p} v_k^* \nabla_x h_k(x^*) \quad = \quad -\nabla_x f(x^*).$$

$$\Updownarrow \qquad \text{podle věty 1.11 (Farkasova věta)}$$

Pro každé $z \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$z^\top \nabla_x g_j(x^*) \leq 0\,, \ \forall\, j \in B(x^*)\,,$$
$$z^\top \nabla_x h_k(x^*) = 0\,, \ \forall\, k = 1, \ldots, p,$$

$$\text{platí} \qquad -\, z^\top \nabla_x f(x^*) \leq 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$Z(x^*) = \emptyset.$$

Q.E.D.

Význam množiny $Z(x)$ je v tom, že obsahuje všechny směry, které z bodu x směřují „do množiny **M**“ a účelová funkce přitom klesá. To znamená, že v bodě x by mohlo být minimum pouze v případě, když $Z(x^*) = \emptyset$. Toto však je, bohužel, pouze heuristická představa. Existují množiny pro něž naše představa selhává. Směry z $Z(x)$ totiž nemusí vůbec směřovat do množiny **M**. Jako příklad si můžeme uvést kružnici a její libovolný bod. Musíme proto uvažovat množiny, pro něž je naše představa v pořádku. Jednu z vhodných možností nabízí následující věta.

Věta 2.17: *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina a funkce f, g_j, $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ mají reálné hodnoty a spojité parciální derivace na $\widetilde{\mathsf{M}}$.*

Když je bod x^* lokálním minimem úlohy (2.1) a pro každé $z \in Z(x^*)$ existuje spojitě diferencovatelná vektorová funkce $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ a $\theta_0 > 0$ s vlastnostmi:

$$\Psi(0) = x^*\,,\ \ \Psi'(0) = \lambda z\,,\ \ \Psi(\theta) \in \mathbf{M}\,,\ \ 0 < \theta < \theta_0,\ \ \textit{pro}\ \theta_0 > 0, \tag{2.22}$$

potom $Z(x^*) = \emptyset$.

Důkaz: Nechť je x^* bod lokálního minima úlohy (2.1), $z \in Z(x^*)$ a Ψ je vektorová funkce, která má vlastnosti (2.22). Definujeme funkci

$$F(\theta) = f(\Psi(\theta)).$$

Pak F je spojitá funkce na $[0, \theta_0)$ a má v bodě 0 lokální minimum, protože Ψ je spojitá funkce, $\Psi(\theta) \in \mathbf{M}$ pro všechna $0 \leq \theta < \theta_0$ a x^* je lokální minimum funkce f na **M**.
Proto pro malá $\theta > 0$ platí $F(0) \leq F(\theta)$.
Tedy funkce F neklesá v bodě 0 a pro její derivaci platí

$$0 \leq F'(0) = \left(\Psi'(0)\right)^\top \nabla_x f(\Psi(0)) = \lambda z^\top \nabla_x f(x^*).$$

To je však ve sporu s tím, že $z \in Z(x^*)$.

Tudíž množina $Z(x^*) = \emptyset$.

Q.E.D.

Podmínkám, které pro x^* lokální minimum úlohy (2.1) implikují, že je množina $Z(x^*)$ prázdná, říkáme podmínky regularity. V anglicky psané literatuře se používá termín „ Constraint Qualification“.

Nejobecnější podmínkou regularity, s kterou se seznámíme, je Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity, která byla publikována již roku 1956.

Definice 2.18 *Nechť funkce f, g_j, $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ jsou definované a spojitě diferencovatelné na otevřené množině $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$.*

Řekneme, že v bodě $\widetilde{x} \in \mathbf{M}$ je splněna Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity (K-T), když pro každé $z \neq 0$, $z \in \mathbb{R}^n$, které splňuje

$$z^\top \nabla_x g_j(\widetilde{x}) \leq 0\,,\ j \in B(\widetilde{x})\,,\ z^\top \nabla_x h_k(\widetilde{x}) = 0, k = 1, 2, \ldots, p, \tag{2.23}$$

existuje spojitě diferencovatelná vektorová funkce $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ a $\theta_0 > 0$ s vlastnostmi:

$$\Psi(0) = \widetilde{x}\,,\ \Psi'(0) = \lambda z,\ \Psi(\theta) \in \mathbf{M}\,,\ 0 < \theta < \theta_0,\ \textit{pro}\ \theta_0 > 0. \tag{2.24}$$

Poznámka 2.19: Všimněme si, že (K-T) podmínka nezávisí na funkci f, tedy je stejná pro maximalizační i minimalizační úlohy.

♠

Věta 2.20 (lokNLP ⇒ LPO): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina a funkce f, g_j, $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ mají reálné hodnoty a spojité parciální derivace na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Nechť v bodě $x^* \in \mathbf{M}$ je lokální minimum úlohy (2.1) a je v něm splněna Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity (K-T).*

Pak existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ takové, že trojice $(x^*, u^*, v^*) \in \widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky (LPO).

Důkaz: Podmínka (K-T) evidentně implikuje podmínku (2.22).
Proto podle věty 2.17 je množina $Z(x^*) = \emptyset$.
Což je podle věty 2.16 ekvivalentní s (LPO).

Q.E.D.

Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity je splněna v řadě běžných situací.

Věta 2.21: *Nechť g_j, $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ jsou lineární funkce. Pak Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity (K-T) je splněna v každém bodě množiny $\mathbf{M}$.*

Důkaz: Označme si $g_j(x) = \alpha_j^\top x + \beta_j$, $h_k(x) = a_k^\top x + b_k$.
Vezměme $\widetilde{x} \in \mathbf{M}$.
Nechť směr $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ splňuje

$$z^\top \nabla_x g_j(\widetilde{x}) = z^\top \alpha_j \leq 0\,,\ \forall\, j \in B(\widetilde{x})\,,\ z^\top \nabla_x h_k(\widetilde{x}) = z^\top a_k = 0\,,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, p.$$

Definujeme $\Psi(\theta) = \widetilde{x} + \theta z$, $\theta \in \mathbb{R}$ a ukážeme, že takto definovaná vektorová funkce splňuje (2.24).

Evidentně $\Psi(0) = \widetilde{x}$ a $\Psi'(0) = z$. Musíme ještě ověřit, že $\Psi(\theta) \in \mathbf{M}$ pro malá θ.

1. Pro každé $j \in B(\widetilde{x})$ a každé $\theta \geq 0$ platí
$$g_j(\Psi(\theta)) = \alpha_j^\top \Psi(\theta) + \beta_j = \alpha_j^\top \widetilde{x} + \beta_j + \theta\alpha_j^\top z = g_j(\widetilde{x}) + \theta\alpha_j^\top z \leq 0,$$
neboť $g_j(\widetilde{x}) = 0$ a $\alpha_j^\top z \leq 0$.
2. Pro každé $j \notin B(\widetilde{x})$ a každé $\theta \geq 0$ platí
$$g_j(\Psi(\theta)) = \alpha_j^\top \Psi(\theta) + \beta_j = \alpha_j^\top \widetilde{x} + \beta_j + \theta\alpha_j^\top z = g_j(\widetilde{x}) + \theta\alpha_j^\top z.$$
Víme, že $g_j(\widetilde{x}) < 0$. Definujme
$$\begin{array}{rclll} \theta_j & = & +\infty & \text{pokud} & \alpha_j^\top z \leq 0, \\ & = & -\frac{g_j(\widetilde{x})}{\alpha_j^\top z} & \text{pokud} & \alpha_j^\top z > 0. \end{array}$$
3. Pro každé $k = 1, 2, \ldots, p$ a každé $\theta \geq 0$ platí
$$h_k(\Psi(\theta)) = a_k^\top \Psi(\theta) + b_k = a_k^\top \widetilde{x} + b_k + \theta a_k^\top z = h_k(\widetilde{x}) + \theta a_k^\top z = 0,$$
neboť $h_k(\widetilde{x}) = 0$ a $a_k^\top z = 0$.

Odtud $\Psi(\theta) \in M$ pro každé $\theta \in [0, \theta_0]$, kde $\theta_0 = \min\{\theta_j\,,\ j \notin B(\widetilde{x})\}$.

Tím jsme ukázali, že podmínka (K-T) je splněna v každém bodě množiny **M**.

Q.E.D.

Připomeňme, že v tomto případě je množina přípustných řešení úlohy (2.1) konvexní polyedrická množina.

Věta 2.22: *Nechť g_j, $j = 1, \ldots, m$ jsou diferencovatelné konvexní funkce a h_k, $k = 1, \ldots, p$ jsou lineární funkce. Když je splněna Slaterova podmínka, viz definice 2.6, pak Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity (K-T) je splněna v každém bodě množiny* **M**.

Důkaz:

Q.E.D.

Definice 2.23 *Řekneme, že v bodě $\widetilde{x} \in M$ je splněna podmínka lineární nezávislosti (LI), jestliže vektory*
$$(\nabla_x g_j(\widetilde{x})\,,\ j \in B(\widetilde{x})\,, \nabla_x h_k(\widetilde{x})\,,\ k = 1, 2, \ldots, p)$$
jsou lineárně nezávislé.

Věta 2.24: *Když je v bodě $\widetilde{x} \in M$ splněna podmínka lineární nezávislosti (LI) a funkce g_j jsou spojité v $\widetilde{x}$ pro každé $j \notin B(\widetilde{x})$, pak je v tomto bodě splněna Kuhnova-Tuckerova podmínka regularity (K-T).*

Důkaz: Důkaz, viz [1]. Důkaz se opírá o větu „ o implicitní funkci“.

Q.E.D.

Poznámka 2.25: Podmínka lineární nezávislosti odpovídá, v případě úlohy o vázaném extrému, podmínce na plnou hodnost matice (2.8).

♠

Uveďme si příklad úlohy s bodem optima $\hat{x}$, v němž není splněno (LI) ani (K-T) a přesto množina $Z(\hat{x}) = \emptyset$.

Příklad 2.26: Uvažujme úlohu $\min \left\{ x_2 \,:\, (1-x_1)^3 - x_2 \geq 0\,,\; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$.

Úloha má v každém bodě $(t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$ globální minimum.
Soustřeďme se na bod $x^* = (1, 0)$.

Označme si funkce

$$f(x) = x_2,\; g_1(x) = -(1-x_1)^3 + x_2,\; g_2(x) = -x_1,\; g_3(x) = -x_2.$$

Lagrangeova funkce je pro tuto úlohu tvaru

$$\mathsf{L}(x;u) = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x) + u_3 g_3(x) = x_2 - u_1[(1-x_1)^3 - x_2] - u_2 x_1 - u_1 x_2.$$

Ještě vypočtěme gradienty v bodě x^*

$$\nabla_x f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; \nabla_x g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; \nabla_x g_2(x^*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\; \nabla_x g_3(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- V bodě x^* není splněná podmínka lineární nezávislosti (LI), neboť množina aktivních omezení je $B(x^*) = \{1, 3\}$ a gradienty $\nabla_x g_1(x^*)$, $\nabla_x g_3(x^*)$ jsou lineárně závislé neboť $\nabla_x g_1(x^*) = -\nabla_x g_3(x^*)$.
- Také (K-T) podmínka není splněna. Například směr $z = \binom{1}{0}$ splňuje

  $$z^\top \nabla_x g_1(x^*) = (1\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,\; z^\top \nabla_x g_3(x^*) = (1\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

  Předpokládejme diferencovatelnou funkci Ψ a $\lambda > 0$ takové, že $\Psi(0) = x^*$, $\Psi'(0) = \lambda z = \binom{\lambda}{0}$.
  Pak však první složka vektorové funkce musí splňovat $\Psi(\theta)_1 > 1$ pro malá kladná θ.
  To však znamená, že $\Psi(\theta) \notin M$ pro malá kladná θ.
  Pro směr $z = \binom{1}{0}$ je tedy podmínka (K-T) porušena.
- Ale v bode x^* je $\nabla_x f(x^*) = \binom{0}{1}$ a

  $$\begin{aligned} Z(x^*) &= \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \,:\, z^\top \nabla_x f(x^*) < 0\,,\; z^\top \nabla_x g_1(x^*) \leq 0\,,\; z^\top \nabla_x g_3(x^*) \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \,:\, z^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z_2 < 0\,,\; z^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z_2 \leq 0\,,\; z^\top \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -z_2 \leq 0 \right\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

  Podle věty 2.16 víme, že existuje $u^* \in \mathbb{R}^3$ takové, že dvojice (x^*, u^*) splňuje (LPO).
  Dosazením se lehce přesvědčíme, že například vektor $u^* = (0, 0, 1)^\top$ má tuto vlastnost.

△

Samotné podmínky (LPO)nestačí k tomu, aby daný bod byl lokálním minimem úlohy (2.1). Je třeba přidat ještě další podmínku.

Definice 2.27 *Nechť f, g_j , $j = 1, \dots, m$, h_k, $k = 1, \dots, p$ mají reálné hodnoty a druhé parciální derivace na nějaké otevřené množině $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$.*

Potom řekneme, že pro úlohu (2.1) a trojici $(x^*, u^*, v^*) \in \mathbf{M} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ je splněna postačující podmínka 2.řádu (SOSC) (Second Order Sufficient Condition), když

$$u^* \geq 0$$

a pro libovolný směr $z \neq 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$\begin{aligned} z^\top \nabla_x g_j(x^*) &= 0 \quad \text{pro} \quad j \in B(x^*)\,,\ u_j^* > 0, \\ z^\top \nabla_x g_j(x^*) &\leq 0 \quad \text{pro} \quad j \in B(x^*)\,,\ u_j^* = 0, \\ z^\top \nabla_x h_k(x^*) &= 0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

platí

$$z^\top \nabla^2_{x,x} \mathsf{L}\,(x^*; u^*, v^*)\, z > 0.$$

Věta 2.28 (LPO $\Rightarrow$ lokNLP): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená množina a funkce f, g_j, $j = 1, \dots, m$, h_k, $k = 1, \dots, p$ mají reálné hodnoty a spojité druhé parciální derivace na $\widetilde{\mathsf{M}}$.*

Když trojice $(x^*, u^*, v^*) \in \widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky (LPO)a (SOSC) pro úlohu (2.1), pak x^* je bod ostrého lokálního minima úlohy (2.1).

Důkaz: Tvrzení ukážeme sporem.

Předpokládejme, že x^* není bod ostrého lokálního minima úlohy (2.1).
Pak existuje posloupnost $x_\beta \in \mathbf{M}$, $x_\beta \neq x^*$, která konverguje k x^* a $f(x_\beta) \leq f(x^*)$.
Vybereme podposloupnost x_{β_γ}, $\gamma \in \mathbb{N}$ takovou, že

$$\frac{x_{\beta_\gamma} - x^*}{\left\| x_{\beta_\gamma} - x^* \right\|} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \eta.$$

Funkce mají spojité první parciální derivace a tak z Rolleovy věty („ věta o střední hodnotě“) existují body $\theta_{f,\gamma}$, $\theta_{g,j,\gamma}$, $j \in B(x^*)$, $\theta_{h,k,\gamma}$, $k = 1, 2, \dots, p$ ležící uvnitř intervalu, který spojuje body x_{β_γ} a x^*, tak, že platí

$$\begin{aligned} 0 \geq f(x_{\beta_\gamma}) - f(x^*) &= \left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right)^\top \nabla_x f(\theta_{f,\gamma})\,, \\ 0 \geq g_j(x_{\beta_\gamma}) = g_j(x_{\beta_\gamma}) - g_j(x^*) &= \left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right)^\top \nabla_x g_j(\theta_{g,j,\gamma})\,, \\ 0 = h_k(x_{\beta_\gamma}) = h_k(x_{\beta_\gamma}) - h_k(x^*) &= \left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right)^\top \nabla_x h_k(\theta_{h,k,\gamma})\,. \end{aligned}$$

Podmínky vydělíme normou $\left\| x_{\beta_\gamma} - x^* \right\|$. Po limitním přechodu $\gamma \to +\infty$ dostáváme

$$\begin{aligned} &0 \geq \eta^\top \nabla_x f(x^*)\,, \\ &0 \geq \eta^\top \nabla_x g_j(x^*) \quad \forall\, j \in B(x^*)\,, \\ &0 = \eta^\top \nabla_x h_k(x^*) \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, p\,. \end{aligned}$$

V bodě x^* jsou splněny podmínky (LPO), což znamená

$$0 = \nabla_x \mathsf{L}\,(x^*; u^*, v^*) = \nabla_x f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* \nabla_x g_j(x^*) + \sum_{k=1}^{p} v_k^* \nabla_x h_k(x^*)\,.$$

Odtud dostáváme

$$0 \geq \eta^\top \nabla_x f(x^*) = -\sum_{u_j^*>0} u_j^* \, \eta^\top \nabla_x g_j(x^*) \, .$$

To však znamená, že

$$\eta^\top \nabla_x f(x^*) = 0, \ \eta^\top \nabla_x g_j(x^*) = 0 \quad \forall\, j \in B\left(x^*\right) \, , \ u_j^* > 0 \, .$$

Opět z Rolleovy věty existuje μ_γ, ležící uvnitř intervalu, který spojuje body x_{β_γ} a x^*, tak, že platí

$$\begin{aligned}
& 0 \geq f(x_{\beta_\gamma}) - f(x^*) = \\
& \mathsf{L}\left(x_{\beta_\gamma}; u^*, v^*\right) - \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* \left(g_j(x^*) - g_j(x_{\beta_\gamma})\right) + \sum_{k=1}^{p} v_k^* \left(k_k(x^*) - h_k(x_{\beta_\gamma})\right) = \\
& \mathsf{L}\left(x_{\beta_\gamma}; u^*, v^*\right) - \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) - \sum_{u_j^*>0} u_j^* g_j(x_{\beta_\gamma}) \geq \\
& \mathsf{L}\left(x_{\beta_\gamma}; u^*, v^*\right) - \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) = \\
& \left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right)^\top \nabla_x \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) + \frac{1}{2}\left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right)^\top \nabla^2_{x,x} \mathsf{L}\left(\mu_\gamma; u^*, v^*\right) \left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right) = \\
& \frac{1}{2}\left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right)^\top \nabla^2_{x,x} \mathsf{L}\left(\mu_\gamma; u^*, v^*\right) \left(x_{\beta_\gamma} - x^*\right) \, .
\end{aligned}$$

Nerovnost vydělíme $\frac{1}{2}\left\|x_{\beta_\gamma} - x^*\right\|^2$. Po limitním přechodu $\gamma \to +\infty$ dostáváme

$$0 \geq \eta^\top \nabla^2_{x,x} \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) \eta \, .$$

Takovýto směr však podle podmínky (SOSC) neexistuje. Dostali jsme se tedy do sporu.

Tudíž x^* je bod ostrého lokálního minima úlohy (2.1).

Q.E.D.

Věta 2.29 (LPO $\Rightarrow$ lokGPO): *Nechť $x^* \in \mathbf{M}$, $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená konvexní množina a funkce f, g_j, $j = 1, \ldots, m$, h_k, $k = 1, \ldots, p$ mají reálné hodnoty na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta\left(x^*\right) \subset \widetilde{\mathsf{M}}$, funkce $f, g_j, j = 1, \ldots, m$ jsou konvexní a mají spojité parciální derivace na $\mathcal{U}_\delta\left(x^*\right)$ a funkce $h_k, k = 1, \ldots, p$ jsou lineární na $\mathcal{U}_\delta\left(x^*\right)$.*

Když existují $u^* \in \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že (x^*, u^*, v^*) splňuje (LPO)pro úlohu (2.1). Potom (x^*, u^*, v^*) splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $\widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Tato trojice pak automaticky splňuje podmínku komplementarity pro NLP, tj. $\sum_{j \in I_1} u_j^* g_j(x^*) = 0$.

Důkaz: Z předpokladů věty plyne, že Lagrangeova funkce je konvexní v x na $\mathcal{U}_\delta\left(x^*\right)$. Je splněno (LPO)a tak pro $x \in \mathcal{U}_\delta\left(x^*\right)$ platí

$$\mathsf{L}\left(x; u^*, v^*\right) \geq \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) + \left(x - x^*\right)^\top \nabla_x \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) = \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) .$$

Dále pro $u \in \mathbb{R}^{I_1}$, $u \geq \mathbf{0}$ a $v \in \mathbb{R}^{J_1}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}\left(x^*; u, v\right) &= \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(u_j - u_j^*\right) g_j(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \left(v_k - v_k^*\right) h_k(x^*) \\
&= \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) \leq \mathsf{L}\left(x^*; u^*, v^*\right) .
\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že (x^*, u^*, v^*) splňuje (lokGPO)pro úlohu (2.1) v oboru $\widetilde{\mathsf{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. a je splněna komplementarita.

Q.E.D.

Definice 2.30 *Když pro všechna $j \in B(x^*)$ jsou $u_j^* > 0$, pak mluvíme o silné komplementaritě.*

Všimněme si speciálních případů.

Příklad 2.31: Nechť $f \in \mathcal{C}^2$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \le b\}$. Označme $g(x) = Ax - b$.
Lagrangeova funkce je

$$\mathsf{L}(x; u) = f(x) + u^\top (Ax - b).$$

Podle věty 2.21 víme, že v každém bodě množiny M je splněna podmínka (K-T).

(LPO)jsou tvaru:

i) $Ax^* - b \le 0$;

ii) $u^* \ge 0,\ (u^*)^\top (Ax^* - b) = 0$;

iii) $\nabla_x f(x^*) + A^\top u^* = 0$;

Předpokládejme, že $M \neq 0$ a $\nabla^2_{x,x} f(x)$ pozitivně definitní pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, tedy f je ryze konvexní. Potom (SOSC) platí, protože pro libovolné $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$ je

$$y^\top \nabla^2_{x,x} L(x^*, u^*) y = y^\top \nabla^2_{x,x} f(x^*) y > 0.$$

Zjistili jsme, že pro tuto speciální úlohu je $x^* \in \mathbb{R}^n$ bod lokálního minima f na M právě tehdy, když existuje $u^* \ge 0$ takové, že dvojice (x^*, u^*) splňuje (LPO).

$\triangle$

Příklad 2.32: Uvažujme úlohu (LP) $\min \left\{ c^\top x \,:\, Ax = b\,,\ x \ge 0 \right\}$. Tedy

$$f(x) = c^\top x,\ h_k(x) = \sum_{i=1}^n A_{k,i} x_i - b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ g_j(x) = -x_i,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

Lagrangeova funkce je

$$\mathsf{L}(x; u, v) = c^\top x + v^\top (Ax - b) - u^\top x.$$

Podle věty 2.21 víme, že v každém bodě množiny M je splněna podmínka (K-T).

Vypišme podmínky(LPO):

i) $Ax^* = b,\ x^* \ge 0$;

ii) $u^* \ge 0,\ (u^*)^\top x^* = 0$;

iii) $c + A^\top v^* - u^* = 0$.

Z iii) plyne $u^* = c + A^\top v^* \geq 0$, protože $u^* \geq 0$ a dále z ii) platí

$$0 = (x^*)^\top u^* = c^\top x^* + (x^*)^\top A^\top v^* = c^\top x^* + b^\top v^*.$$

Položíme-li $y^* = -v^*$, (LPO)přejdou na tvar

i) $Ax^* = b,\ x^* \geq 0$;

ii) $b^\top y^* = c^\top x^*$;

iii) $A^\top y^* \leq c$.

Když x^* je optimální řešení úlohy (LP), pak podle věty 2.20 splňuje (LPO). Což ale v tomto případě znamená, že existuje y^* optimální řešení příslušné duální úlohy.

Odvodili jsme tedy dualitu v LP. Zdánlivě jsme ji odvodili jednoduše, pouze s využitím vět 2.16 a 2.20. To je však opravdu jen zdánlivé, neboť při důkazu věty 2.20 jsme využili Farkasovu větu, která je s dualitou v LP ekvivalentní.

△

Příklad 2.33: Pokračujme ještě v příkladě 2.32.

Množina indexů aktivních omezení je $B(x^*) = \{j : x_i^* = 0\}$.
Předpokládejme, že platí silná komplementarita.
Pak (SOSC) říká, že neexistuje žádné $z \neq 0$ s vlastností $Az = \mathbf{0}$ a $z_j = 0$ pro $j \in B(x^*)$.
Uvedený požadavek znamená, že soustava $A_{I\times B(x^*)} y_{B(x^*)} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $y_{B(x^*)} = \mathbf{0}$.
Tudíž $A_{I\times B(x^*)}$ má lineárně nezávislé sloupce. To jsou ale sloupce v A odpovídající kladným složkám $x_i^* > 0$ řešení x^*, tedy x_i^* je bazické řešení.

△

Poznámka 2.34: Podmínky (LPO)pro úlohu (2.1) můžeme zapsat přehledně pomocí gradientů Lagrangeovy funkce (2.4):

i) $\nabla_u L(x^*, v^*, u^*) \leq 0,\ \nabla_v L(x^*, v^*, u^*) = 0$;

ii) $u^* \geq 0,\ (u^*)^\top \nabla_u L(x^*, v^*, u^*) = 0$;

iii) $\nabla_x L(x^*, v^*, u^*) = 0$.

♠

2.5 Symetrická úloha NLP

V této kapitole se budeme zabývat druhým případem, kdy umíme jednoduše zformulovat (LPO). Budeme uvažovat symetrickou úlohou nelineárního programování:

$$\min \{f(x) \;:\; g_j(x) \le 0,\; j = 1,2,\dots,m,\; x_i \ge 0,\; i = 1,2,\dots,n\} \tag{2.25}$$

Tuto úlohu budeme označovat SNLP.

Množinu všech přípustných řešení opět označíme

$$\mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; g_j(x) \le 0,\; j = 1,2,\dots,m,\; x_i \ge 0,\; i = 1,2,\dots,n\} \tag{2.26}$$

Uvědomme si, že pro symetrickou úlohu NLP se množina indexů aktivních omezení rozpadne na dvě části

$$B(x) = B_g(x) \cup B_x(x)\,,\ \text{kde } B_g(x) = \{j : g_j(x) = 0\}\,,\ B_x(x) = \{i : x_i = 0\}.$$

Také množina směrů Z má speciální tvar

$$Z(x^*) = \left\{z \in \mathbb{R}^n \;:\; z^\top \nabla_x g_j(x^*) \le 0,\; j \in B_g(x^*)\,,\; z_i \ge 0,\; i \in B_x(x^*)\,,\; z^\top \nabla_x f(x^*) < 0\right\}.$$

Pro symetrickou úlohu NLP (2.25) sestavíme „zkrácený tvar“ Lagrangeovy funkce. Všechna omezení určená funkcemi g_j, $j = 1,2,\dots,m$ zařadíme do Lagrangeovy funkce a všechna omezení daná nezáporností proměnných ponecháme v podmínkách. Lagrangeova funkce má tedy tvar

$$\mathsf{L}^S(x;y) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j g_j(x) \tag{2.27}$$

a uvažujeme ji pro $x \in \widetilde{\mathsf{M}}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Pak pro symetrickou úlohu NLP (2.25) globální a lokální podmínky optimality mají následující tvar.

Definice 2.35 *Nechť funkce f, g_j, $j = 1,2,\dots,m$ jsou definované na množině $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ a $x^* \in \mathbb{R}^n$, $y^* \in \mathbb{R}^m$. Řekneme, že pro dvojici (x^*, y^*) jsou splněny globální podmínky optimality pro úlohu SNLP (SGPO) pro symetrickou úlohu NLP (2.25) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^m_+$, jestliže dvojice (x^*, y^*) je sedlový bod Lagrangeovy funkce (2.27) v oboru $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^m_+$, to znamená, že*

$$x^* \in \widetilde{\mathsf{M}}\,,\; x^* \ge 0\,,\; y^* \ge 0$$

a pro všechna $x \in \widetilde{\mathsf{M}}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ platí

$$\mathsf{L}^S(x;y^*) \ge \mathsf{L}^S(x^*;y^*) \ge \mathsf{L}^S(x^*;y) \tag{2.28}$$

Definice 2.36 *Nechť funkce f, g_j, $j = 1,2,\dots,m$ jsou definované a diferencovatelné na otevřené množině $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ a $x^* \in \widetilde{\mathsf{M}}$, $y^* \in \mathbb{R}^m$. Řekneme, že pro dvojici (x^*, y^*) jsou splněny lokální podmínky optimality pro symetrickou úlohu (SLPO) pro symetrickou úlohu NLP (2.25), jestliže platí*

$$x^* \ge 0,\; \nabla_x \mathsf{L}^S(x^*, y^*) \ge 0,\; (x^*)^\top \nabla_x \mathsf{L}^S(x^*, y^*) = 0, \tag{2.29}$$

$$y^* \ge 0,\; \nabla_y \mathsf{L}^S(x^*, y^*) \le 0,\; (y^*)^\top \nabla_y \mathsf{L}^S(x^*, y^*) = 0. \tag{2.30}$$

Věta 2.37 (SGPO $\Rightarrow$ SNLP): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$, funkce f, g_j, $j = 1,2,\dots,m$ mají reálné hodnoty na množině $\widetilde{\mathsf{M}}$ a $x^* \in \widetilde{\mathsf{M}}$. Když existuje $y^* \in \mathbb{R}^m$ takové, že dvojice (x^*, y^*) splňuje (SGPO) pro úlohu (2.25), pak je x^* optimální řešení úlohy (2.25).*

Důkaz: Věta je speciálním případem věty 2.5.

Q.E.D.

Věta 2.38 (SGPO $\Rightarrow$ SLPO): *Nechť* $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ *je otevřená množina, funkce* f, g_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ *mají reálné hodnoty a konečné parciální derivace na* $\widetilde{\mathsf{M}}$ *a* $x^* \in \mathbb{R}^n$, $y^* \in \mathbb{R}^m$. *Když dvojice* (x^*, y^*) *splňuje podmínku (SGPO) v oboru* $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^p_+$, *pak splňuje také podmínku (SLPO).*

Důkaz: Předpokládejme, že jsou podmínky (SGPO) splněny.

1. Podmínka (SGPO) říká, že $x^* \in \widetilde{\mathsf{M}}$, $x^* \geq 0$ a funkce $\mathsf{L}^S(\bullet; y^*)$ nabývala svého minima na množině $\widetilde{\mathsf{M}} \cap \mathbb{R}^n_+$ v bodě x^*.

   Pro derivaci Lagrangeovy funkce podle x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

   $$\frac{\partial \mathsf{L}^S}{\partial x_i}(x^*; y^*) = \lim_{t \to 0+} \frac{\mathsf{L}^S(x^* + t\,\mathsf{e}_i; y^*) - \mathsf{L}^S(x^*; y^*)}{t} \geq 0 \,.$$

   Pokud $x_i^* > 0$, pak platí ještě

   $$\frac{\partial \mathsf{L}^S}{\partial x_i}(x^*; y^*) = \lim_{t \to 0-} \frac{\mathsf{L}^S(x^* + t\,\mathsf{e}_i; y^*) - \mathsf{L}^S(x^*; y^*)}{t} \leq 0 \,.$$

   Tím je splnění podmínky (2.29) dokázáno.

2. Podmínka (SGPO) říká, že $y^* \geq 0$ a funkce $\mathsf{L}^S(x^*; \bullet)$ nabývala svého maxima na množině $\mathbb{R}^p_+$ v bodě y^*.

   Pro derivaci Lagrangeovy funkce podle y_k, $j = 1, 2, \ldots, p$ platí

   $$\frac{\partial \mathsf{L}^S}{\partial y_k}(x^*; y^*) = \lim_{t \to 0+} \frac{\mathsf{L}^S(x^*; y^* + t\,\mathsf{e}_k) - \mathsf{L}^S(x^*; y^*)}{t} \leq 0 \,.$$

   Pokud $y_k^* > 0$, pak platí ještě

   $$\frac{\partial \mathsf{L}^S}{\partial y_k}(x^*; y^*) = \lim_{t \to 0-} \frac{\mathsf{L}^S(x^*; y^* + t\,\mathsf{e}_k) - \mathsf{L}^S(x^*; y^*)}{t} \geq 0 \,.$$

   Tím je splnění podmínky (2.30) dokázáno.

Tím jsou podmínky (SLPO) dokázány.

Q.E.D.

Věta 2.39 (SGPO $\Leftrightarrow$ SLPO): *Nechť* $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ *je otevřená konvexní množina a funkce* f, g_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ *mají reálné hodnoty, jsou konvexní a mají spojité parciální derivace na* $\widetilde{\mathsf{M}}$ *a* $x^* \in \mathbb{R}^n$, $y^* \in \mathbb{R}^m$.

Pak dvojice (x^*, y^*) *splňuje podmínku (SGPO) v oboru* $(\widetilde{\mathsf{M}} \cap \mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^p_+$ *tehdy a jen tehdy, když splňuje podmínku (SLPO).*

Důkaz: Z předchozí věty 2.38 víme, že (SGPO) implikuje (SLPO). Stačí tedy ukázat opačnou implikaci. Předpokládejme tedy, že dvojice (x^*, y^*) splňuje podmínku (SLPO).

1. Funkce $\mathsf{L}^S(\bullet; y^*)$ je konvexní na $\widetilde{\mathsf{M}}$. Proto s využitím (2.29), pro ní platí

$$\begin{aligned}\mathsf{L}^S(x;y^*) &\geq \mathsf{L}^S(x^*;y^*) + (x-x^*)^\top \nabla_x \mathsf{L}^S(x^*,y^*)\\ &= \mathsf{L}^S(x^*;y^*) + x^\top \nabla_x \mathsf{L}^S(x^*,y^*) \geq \mathsf{L}^S(x^*;y^*) \quad \forall\, x \in \widetilde{\mathsf{M}}\,,\ x \geq 0.\end{aligned}$$

2. Funkce $\mathsf{L}^S(x^*; \bullet)$ je lineární na celém $\mathbb{R}^m$ a tak podle (2.30) platí

$$\begin{aligned}\mathsf{L}^S(x^*;y) &= \mathsf{L}^S(x^*;y^*) + (y-y^*)^\top \nabla_y \mathsf{L}^S(x^*,y^*)\\ &= \mathsf{L}^S(x^*;y^*) + y^\top \nabla_y \mathsf{L}^S(x^*,y^*) \leq \mathsf{L}^S(x^*;y^*) \quad \forall\, y \geq 0.\end{aligned}$$

Tím je ukázáno, že dvojice (x^*, y^*) splňuje podmínku (SGPO).

Q.E.D.

Poznámka 2.40:
Otázka: Stačí předpokládat f, g_j konvexní $\forall j$ a x^* bod lokálního minima SNLP, aby existovalo y^* takové, že dvojice (x^*, y^*) splňuje podmínky (SGPO)?
Odpověď: Nikoliv, ještě je zapotřebí splnit vhodnou podmínku regularity.
Víme, že například při splnění Slaterovy podmínky, viz věta 2.7, již tato implikace platí.

♠

Uveďme si ještě jeden ilustrativní příklad.

Příklad 2.41: Uvažujme úlohu $\min\left\{-x : x^2 \leq 0, x \geq 0\right\}$. Existuje pouze jediné přípustné a tedy i optimální řešení, $x^* = 0$. Lagrangeova funkce má tvar $\mathsf{L}^S(x;y) = -x + yx^2$.
Předpokládejme, že bod $(0, y^*)$ splňuje (SGPO). Je tedy sedlovým bodem této Lagrangeovy funkce v nezáporné oblasti, tj.

$$-x + y^* x^2 \geq 0;\ y^* \geq 0,\ \forall x \geq 0.$$

Pak ovšem

$$y^* \geq \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Takové y^* však zřejmě neexistuje.

△

Věta 2.42 (SNLP $\Rightarrow$ SGPO): *Nechť $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ je otevřená konvexní množina, funkce $f, g_j, j = 1, \ldots, m$ mají reálné hodnoty a jsou konvexní $\widetilde{\mathsf{M}}$ a úloha (2.25) splňuje Slaterovu podmínku.*
Když x^* je optimální řešení úlohy (2.25), potom existuje $y^* \in \mathbb{R}^p$ tak, že dvojice (x^*, y^*) splňuje podmínku (SGPO).

Důkaz: Tvrzení je speciálním případem věty 2.7.

Q.E.D.

Věta 2.43 (SNLP ⇔ SLPO): *Nechť* $\widetilde{\mathsf{M}} \supset \mathbf{M}$ *je otevřená konvexní množina, funkce* $f, g_j, j = 1, \ldots, m$ *mají reálné hodnoty, jsou konvexní a mají konečné parciální derivace na* $\widetilde{\mathsf{M}}$ *a úloha (2.25) splňuje Slaterovu podmínku.*

Pak x^* *je minimem úlohy (2.25) tehdy a jen tehdy, když existuje* $y^* \geq 0$ *takové, že dvojice* (x^*, y^*) *splňuje (SLPO).*

Důkaz: Věta je spojením vět 2.39 a 2.42.

Q.E.D.

Při globálních podmínkách optimality se rozlišuje maximum a minimum (viz následující příklad).

Příklad 2.44: Řešíme úlohu $\min\left\{-x_1^2 - x_2^2 \,:\, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}$.

Sestavme Lagrangeovu funkci

$$\mathsf{L}^S(x; y) = -x_1^2 - x_2^2 + y_1(x_1 + x_2 - 1).$$

Jestli si zakreslíme množinu přípustných řešení a „ vrstevnici“ účelové funkce $\{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1^2 - x_2^2 = r\}$, tak je z obrázku vidět, že minimum je v bodech $[1, 0]$ a $[0, 1]$.

Podmínky (SLPO) pro bod (x^*, y^*) jsou

$$\nabla_x \mathsf{L}^S(x_1^*, x_2^*, y^*) = \begin{pmatrix} -2x_1^* + y^* \\ -2x_2^* + y^* \end{pmatrix} \geq 0,\ x_1^* \geq 0,\ x_2^* \geq 0,\ \begin{pmatrix} -2(x_1^*)^2 + x_1^* y^* \\ -2(x_2^*)^2 + x_2^* y^* \end{pmatrix} = 0, \tag{2.31}$$

$$\nabla_y \mathsf{L}^S(x_1^*, x_2^*, y^*) = x_1^* + x_2^* - 1 \leq 0,\ y^* \geq 0,\ x_1^* y^* + x_2^* y^* - y^* = 0. \tag{2.32}$$

Podmínky jsou evidentně splněné v bodě $[0, 0, 0]$. V počátku má ale účelová funkce maximum, nikoli minimum.

△

2.6 Význam Lagrangeových multiplikátorů

Podívejme se ještě na interpretaci a praktický význam Lagrangeových multiplikátorů. Ukážeme si, že umožňují odhadnout změnu optimální hodnoty účelové funkce při změně podmínek úlohy.

Věta 2.45 (Interpretace Lagrangeových multiplikátorů): *Nechť* $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jsou konvexní funkce pro každé* $j = 1, 2, \ldots, m$ *a* $b^{(1)}, b^{(2)} \in \mathbb{R}^m$. *Uvažujeme dvě úlohy SNLP*

$$\min\left\{ f(x) \,:\, g_j(x) \leq b_j^{(1)}, j = 1, \ldots, m,\ , x \geq 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{2.33}$$

$$\min\left\{ f(x) \,:\, g_j(x) \leq b_j^{(2)},\ j = 1, \ldots, m,\ , x \geq 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{2.34}$$

Předpokládejme, že Slaterova podmínka platí pro obě úlohy a že obě úlohy mají optimální řešení.

Označíme-li $x^{(1)}, x^{(2)}$ *optimální řešení úloh (2.33) resp. (2.34) a* $y^{(1)}, y^{(2)}$ *odpovídající Lagrangeovy multiplikátory, pak platí odhady*

$$\sum_{j=1}^{p} (b_j^{(1)} - b_j^{(2)}) y_j^{(1)} \leq f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) \leq \sum_{j=1}^{p} (b_j^{(1)} - b_j^{(2)}) y_j^{(2)} \tag{2.35}$$

Důkaz: Důkaz spočívá ve správném dosazení do podmínek (SGPO). Sestavme Lagrangeovu funkci pro úlohu (2.33)

$$L^{(1)}(x,y) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} y_j(g_j(x) - b_j^{(1)}).$$

Protože v $x^{(1)}$ je optimální řešení (2.33), jsou pro dvojici $(x^{(1)}, y^{(1)})$ splněné (SGPO). Použijeme její levou větev

$$f(x) + \sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(g_j(x) - b_j^{(1)}) \geq f(x^{(1)}) + \sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(g_j(x^{(1)}) - b_j^{(1)})\,,\ \forall x \geq 0.$$

Víme, že $\sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(g_j(x^{(1)}) - b_j^{(1)}) = 0$ a proto

$$f(x) + \sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(g_j(x) - b_j^{(1)}) \geq f(x^{(1)})\,,\ \forall x \geq 0, \tag{2.36}$$

Vztah (2.36) platí pro všechna $x \geq 0$, speciálně pro $x^{(2)}$. Jeho dosazením dostáváme nerovnost

$$f(x^{(2)}) + \sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(g_j(x^{(2)}) - b_j^{(1)}) \geq f(x^{(1)}).$$

Po úpravě a jelikož $g_j(x^{(2)}) \leq b_j^{(2)}$ dostáváme

$$f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) \geq \sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(b_j^{(1)} - g_j(x^{(2)})) \geq \sum_{j=1}^{p} y_j^{(1)}(b_j^{(1)} - b_j^{(2)}).$$

což je levá strana nerovnosti (2.35).
Záměnou pořadí úloh dostaneme i pravou stranu nerovnosti (2.35).

Q.E.D.

Odhady ve větě 2.45 mají ekonomickou interpretaci, využití. Umožňují odhadnout vývoj optimální hodnoty účelové funkce při změně omezení, např. zvýšení, snížení požadavku odběratele; zpřísnění, uvolnění předpisů; rozšíření, redukci výroby; rozšíření, snížení kapacit skladů; atd.

2.7 Zobecnění lokálních podmínek optimality

K formulaci podmínek (LPO)je nutná diferencovatelnost uvažovaných funkcí. K tomu, aby byly ekvivalentní s nalezením minima úlohy, stačí například konvexnost funkcí. Podmínka konvexnosti funkcí se dá zobecnit, například podmínkami pseudo- nebo kvazi-konvexností. Dá se ale nahradit podmínka diferencovatelnosti?

Řešíme úlohu s konvexními funkcemi f, g_j, kde minimalizujeme $f(x)$ za podmínek $g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, p$. Explicitně nemáme zadanou nezápornost, proto Lagrangeova funkce bude tvaru

$$\tilde{L}(x,y) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} y_j g_j(x).$$

Pro tuto úlohu jsou podmínky (LPO)tvaru

$$\nabla_x \tilde{L}(x^*, y^*) = 0\,, \tag{2.37}$$

$$\nabla_y \tilde{L}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} g_1(x^*) \\ g_2(x^*) \\ \cdots \\ g_m(x^*) \end{pmatrix} \leq 0,\ y^* \geq 0,\ \sum_{j=1}^{p} y_j^* g_j(x^*) = 0\,. \tag{2.38}$$

Úlohu vlastně řešíme hledáním volného extrému Lagrangeovy funkce v proměnné x.

Kdyby byly funkce konvexní, ale nebyly by diferencovatelné, pak nutná podmínka optimality bude $0 \in \partial_x \tilde{L}(x^*; y^*)$. Kde $\partial_x \tilde{L}(x^*; y^*)$ je subdiferenciál funkce $\tilde{L}(\bullet, y^*)$ v bodě x^*, viz definice 2.30.

Zobecnění podmínky (2.37) má tvar $0 \in \partial f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} y_j^* \partial g_j(x^*)$. To znamená, že

$$\exists\ \alpha \in \partial f(x^*)\,,\ \beta_j \in \partial g_j(x^*)\ \forall j \quad \text{takové, že} \quad \alpha + \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j^* = 0. \tag{2.39}$$

Kalkulus pro subdiferenciál můžeme najít například v [6].

Kapitola 3

Kvadratické programování

Úlohou kvadratického programování nazýváme úlohu NLP

$$\min\left\{p^\top x + \frac{1}{2}x^\top Cx \,:\, g_j(x) \le 0\,,\; j = 1,\ldots,m\,,\; h_k(x) = 0,\; k = 1,\ldots,p\,,\; x \in \mathbb{R}^n\right\}, \tag{3.1}$$

kde C je pozitivně semidefinitní matice a g_j, $j = 1,\ldots,m$, h_k, $k = 1,\ldots,p$ jsou lineární funkce.

Pro jednoduchost budeme uvazovat symetrickou úlohu kvadratického programování

$$\min\left\{p^\top x + \frac{1}{2}x^\top Cx \,:\, Ax \le b, x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0\right\}. \tag{3.2}$$

Množinu přípustných řešení úlohy označíme standardně

$$\mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \le b, x \ge 0\}\,. \tag{3.3}$$

Máme tedy

$$f(x) = p^\top x + \frac{1}{2}x^\top Cx, \quad g(x) = Ax - b.$$

Funkce f je konvexní a diferencovatelná na celém $\mathbb{R}^n$ a množina přípustných řešení je určena lineárními podmínkami. Proto podle věty 2.21 úloha (3.2) splňuje Kuhnovu-Tuckerovu podmínku (K-T). Dále platí

$$\nabla_x f(x) = p + Cx,\;\; \nabla^2_{x,x} f(x) = C.$$

Při diferencování je třeba si uvědomit, že matice C je symetrická.

Praktická úloha však může být zadána tak, že matice C symetrická není. Tento nedostatek odstraníme jednoduše symetrizací matice C. Místo matice C použijeme matici $\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(C + C^\top)$, která již symetrická je. Hodnota účelové funkce se tím nezmění neboť $x^\top \tilde{\mathbf{C}} x = x^\top Cx$ (Rovnost vychází z faktu, že $x^\top Cx = x^\top C^\top x$.).

Věta 3.1: *Nechť C je pozitivně semidefinitní. Pak x^* je optimální řešení úlohy kvadratického programování (3.1) tehdy a jen tehdy, když existuje $y^* \in \mathbb{R}^m$ tak, že (x^*, y^*) splňuje*

$$p + Cx^* + A^\top y^* \ge 0,\;\; x^* \ge 0,\;\; (x^*)^\top \left(p + Cx^* + A^\top y^*\right) = 0, \tag{3.4}$$

$$Ax^* - b \le 0,\;\; y^* \ge 0,\;\; (y^*)^\top (Ax^* - b) = 0. \tag{3.5}$$

Důkaz: Zkrácená Lagrangeova funkce pro úlohu (3.1) je tvaru

$$L^S(x,y) = p^\top x + \frac{1}{2}x^\top Cx + y^\top(Ax - b).$$

Gradient Lagrangeovy funkce podle x má tvar

$$\nabla_x L^S(x,y) = p + Cx + A^\top y.$$

Vidíme tedy, že podmínky (3.4), (3.5) nejsou nic jiného nežli podmínka (SLPO) pro úlohu (3.1). Ekvivalence plyne z věty 2.43, neboť podle věty 2.21 je splněna Kuhnova-Tuckerova podmínka (K-T) a f je konvexní funkce.

Q.E.D.

3.1 Wolfeho algoritmus

Jedním z algoritmů, který řeší úlohu kvadratického programování, je Wolfeho algoritmus. Algoritmus je založen na řešení podmínek (3.4), (3.5) z věty 3.1 pomocí modifikované simplexové metody. Do vztahů (3.4) a (3.5) zavedeme skluzové proměnné w, v tak, abychom získali rovnosti

$$\begin{aligned} Ax + w &= b,\ w \geq 0, & (3.6)\\ Cx + A^\top y - v &= -p,\ v \geq 0. & (3.7)\end{aligned}$$

Pak podmínky komplementarity z podmínek (3.4), (3.5) přejdou na tvar

$$y^\top w = 0, \quad x^\top v = 0. \tag{3.8}$$

Wolfeho algoritmus

KROK 0: Nejprve najdeme přípustnou bázi $B \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ pro nezáporné řešení soustavy $Ax + w = b$. Když taková primárně přípustná báze neexistuje, pak jdeme na **END 1**.

KROK 1: Sestavíme pomocnou úlohu

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \ : \ \begin{array}{l} Ax + w = b,\ Cx + A^\top y - v + \mathbf{D}z = -p, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ w \geq 0,\ v \geq 0,\ z \geq 0, \end{array} \right\}, \tag{3.9}$$

kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice, kterou definujeme následovně:

- jestli je $\sum_j c_{k,j} x\,(B)_j > -p_k$ pak $d_{k,k} = -1$,
- jestli je $\sum_j c_{k,j} x\,(B)_j < -p_k$ pak $d_{k,k} = +1$,
- a pokud je $\sum_j c_{k,j} x\,(B)_j = -p_k$ pak klademe $d_{k,k} = 1$.

Položíme $L_0 = B \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Pak L_0 je přípustná báze pro úlohu (3.9).

KROK 2: Řešíme úlohu (3.9) pomocí simplexového algoritmu s dodatečnou podmínkou na zařazení proměnné do báze:

- Jestli je x_k zařazeno v bázi, nesmíme do báze zařadit složku v_k.

- Jestli je v_k zařazeno v bázi, nesmíme do báze zařadit složku x_k.
- Je-li w_j zařazeno v bázi, nesmíme do báze zařadit y_j.
- Je-li y_j zařazeno v bázi, nesmíme do báze zařadit w_j.

Těmito podmínkami hlídáme komplementaritu, která není součástí úlohy (3.9).

Jako počáteční bázi pro nastartování simplexového algoritmu použijeme L_0.

Takto upravený simplexový algoritmus se vždy zastaví. Označme si konečnou nalezenou bázi L_{kon}.
Když $\sum_{j=1}^{m} y\left(L_{kon}\right)_j = 0$, pak jdeme na **END 2**,
když $\sum_{j=1}^{m} y\left(L_{kon}\right)_j > 0$, pak jdeme na **END 3**

END 1: Úloha (3.1) nemá přípustné řešení.

END 2: Komponenta bazického řešení $x\left(L_{kon}\right)$ je optimálním řešením úlohy (3.1).

END 3: Algoritmus nenašel optimální řešení úlohy (3.1).

$\diamondsuit$

Wolfeho algoritmus se sice vždy po konečně krocích zastaví, ale nemusí vždy nalézti optimální řešení úlohy (3.1). Je však známo, že Wolfeho algoritmus za dodatečné podmínky optimální řešení vždy nalezne.

Věta 3.2: *Když C je pozitivně semidefinitní a $\mathrm{h}\left(C|p\right) = \mathrm{h}\left(C\right)$, pak Wolfeho algoritmus buď zjistí, že neexistuje přípustné řešení nebo nalezne optimální řešení úlohy (3.1).*

Důkaz: Důkaz je možno nalézt v článku [Wolffe].

Q.E.D.

3.2 Kvadratické programování a souvislost s úlohou o projekci

Věta 3.3: *Nechť C je pozitivně definitní matice. Pak je úloha kvadratického programování (3.1) ekvivalentní, co do polohy optimálního řešení, s úlohou o projekci bodu volného minima funkce $f(x) = p^\top x + \frac{1}{2} x^\top C x$ na množinu $\mathbf{M}$, při volbě normy*

$$\|z\|_C^2 = z^\top C z.$$

Označíme-li tedy bod volného minima funkce f symbolem $\tilde{x}$, pak jde o úlohu

$$\min_{x \in \mathbf{M}} (x - \tilde{x})^\top C (x - \tilde{x}). \tag{3.10}$$

Důkaz: Bod volného minima funkce

$$p^\top x + \frac{1}{2} x^\top C x = \frac{1}{2}\left(x + C^{-1}p\right)^\top C\left(x + C^{-1}p\right) - p^\top C^{-1} p$$

je $\tilde{x} = -C^{-1}p$.
Po dosazení dostáváme vztah

$$\begin{aligned}
(x - \tilde{x})^\top C (x - \tilde{x}) &= x^\top C x - x^\top C \tilde{x} - \tilde{x}^\top C x + \tilde{x}^\top C \tilde{x} \\
&= x^\top C x + 2x^\top C C^{-1} p + p^\top C^{-1} C C^{-1} p \\
&= x^\top C x + 2p^\top x + p^\top C^{-1} p\ .
\end{aligned}$$

Minimalizace tohoto výrazu (po odstranění přebytečné konstanty a vydělení účelové funkce dvěma) vede na úlohu (3.1), tj.

$$\min_{x\in\mathbf{M}} \frac{1}{2}x^\top Cx + p^\top x.$$

Q.E.D.

3.3 Význam kvadratického programování

3.3.1 Metoda nejmenších čtverců

S úlohou kvadratického programování se setkáváme při výpočtu odhadu regresních koeficientů v modelu lineární regrese pomocí metody nejmenších čtverců (OLS). Máme-li dodatečnou informaci o regresních koeficientech vyjádřenou lineárními podmínkami $A\beta = a,\ B\beta \le b$, pak dostáváme úlohu

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{i,j} \right)^2 \ : \ A\beta = a,\ B\beta \le b,\ \beta \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

3.3.2 Markowitzův model

Kvadratické programování má využití též ve finančnictví. Například Markowitzův model.

Uvažujme úlohu nalezení optimálního rozvržení investice do jednotlivých povolených aktivit. Označme

- T časové období, na které investujeme.
- n počet uvažovaných investičních aktivit.
- $x \in \mathbb{R}^n$ vektor našich investic do jednotlivých aktivit na období T.
- $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ je množina přípustných investic. Obsahuje podmínky dané zákony, záměrem investora, velikostí kapitálu určeného pro investice.
- ρ vektor výnosů z investičních aktivit. Výnosy jsou náhodné.

Naším úkolem je „ maximalizovat“ výnos $\rho^\top x$. Výnos je náhodný, a tak není jasné, co to znamená. V Markowitzově modelu uvažujeme maximalizaci středního výnosu $\mathsf{E}\left[\rho^\top x\right] = (\mathsf{E}[\rho])^\top x$. Skutečný náhodný výnos však může být velmi odlišný od středního výnosu. Je proto potřeba ještě počítat s rizikem investice, které se snažíme minimalizovat. Markowitz navrhuje ve svém článku měřit riziko rozptylem portfólia $\mathsf{var}\left(\rho^\top x\right) = x^\top \mathsf{var}(\rho)\, x$.

K úloze s náhodnými výnosy Markowitz přiřazuje nenáhodnou úlohu optimalizovat dvě kritéria

$$\text{maximalizovat } (\mathsf{E}[\rho])^\top x \text{ a zároveň minimalizovat } x^\top \mathsf{var}(\rho)\, x \quad \text{za podmínky } x \in \mathbf{M}.$$

Tento úkol lze „ splnit“ nebo lépe řečeno „ vysvětlit“ úlohami

$$\max \left\{ (\mathsf{E}[\rho])^\top x - \lambda x^\top \mathsf{var}(\rho)\, x \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \in \mathbf{M} \right\},\ \lambda > 0,$$

$$\min \left\{ x^\top \mathsf{var}(\rho)\, x \ : \ (\mathsf{E}[\rho])^\top x \ge k,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \in \mathbf{M} \right\},\ k \in \mathbb{R},$$

$$\max \left\{ (\mathsf{E}[\rho])^\top x \ : \ x^\top \mathsf{var}(\rho)\, x \le \eta,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \in \mathbf{M} \right\},\ \eta > 0.$$

Lze ukázat ekvivalenci mezi těmito úlohami v tom smyslu, že když řešíme jednu z nich pro nějakou hodnotu parametru, pak parametry u zbylých dvou úloh lze nastavit tak, že všechny tři úlohy mají shodná optimální řešení.

3.3.3 Aproximace

Kvadratické programování je také využíváno k aproximaci složitějších úloh.

Kapitola 4

Dopravní problém

Jednou z klasických úloh lineárního programování je takzvaný dopravní problém. Uveďme si nejdříve typický příklad.

Uvažujme firmu (podnik, přepravce), která má zajistit přepravu nějaké suroviny ze skladovacích míst (skladů, míst těžby, atd.) k zákazníkům. Skladovací místa označme $i = 1, 2, \ldots, n$ a zákazníky $j = 1, 2, \ldots, m$. Zákazníci mají požadavky na minimální množství suroviny, které k nim musí být přepraveno. Označme si požadavek j-tého zákazníka jako b_j. Skladovací místo i má kapacitu a_i. Náklady na přepravu jednotkového množství suroviny ze skladovacího místa i k j-tému zákazníkovi jsou $c_{i,j}$. Úkolem je navrhnout, zorganizovat rozvoz, přepravu suroviny tak, aby požadavky zákazníků byly uspokojeny, kapacity skladů nebyly překročeny a celkové náklady na přepravu byly minimální.

Vznikne tak úloha

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \\ \text{za podmínek} & \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq a_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \geq b_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, m \\ & x_{i,j} \geq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{4.1}$$

Tuto úlohu nazýváme uvolněný dopravní problém.

Lemma 4.1 *Pokud $a_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $b_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$, pak úloha (4.1) nemá přípustné řešení.*

Důkaz: Daná podmínka znamená, že souhrn požadavků zákazníků převyšuje souhrnnou kapacitu všech skladů. Požadavky tedy nelze žádným způsobem plně uspokojit.

Q.E.D.

Lemma 4.2 *Pokud $a_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $b_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$, pak úloha (4.1) má přípustné řešení.*

Důkaz: Rozvoz suroviny provedeme tak, že nejdříve ze skladu č.1 po řadě uspokojíme požadavky zákazníků č.$1, 2,$ *atd.* dokud není zásoba ve skladu č.1 vyčerpána. Neuspokojené požadavky uspokojujeme po řadě ze zásob ve skladu č.2 dokud tento se také nevyčerpá. Pak použijeme zásoby ze skladu č.$3, 4,$ *atd.* dokud nebudou všechny požadavky uspokojeny.
Jelikož souhrn kapacit všech skladů není menší nežli souhrn požadavků zákazníků, pak navrženým způsobem dokážeme uspokojit všechny požadavky.

Q.E.D.

Postup, kterým jsme nalezli přípustné řešení úlohy (4.1), je nazýván metoda severozápadního rohu.

Věta 4.3: *Pokud $a_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $b_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$, pak úloha (4.1) má optimální řešení.*

Důkaz: Podle lemmatu 4.2 má, za platnosti předpokladů věty, úloha (4.1) přípustné řešení.
Množina přípustných řešení je kompaktní, neboť je uzavřená a $0 \leq x_{i,j} \leq a_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$.
Tudíž úloha (4.1) má optimální řešení, protože spojitá funkce má na neprázdném kompaktu globální minimum.

Q.E.D.

Pokud v úloze (4.1) budeme vyžadovat splnění všech podmínek jako rovnosti, pak mluvíme o vyváženém dopravním problému. Jedná se tedy o úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \\ \text{za podmínek} & \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = a_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, m \\ & x_{i,j} \geq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{4.2}$$

Lemma 4.4 *Pokud $a_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $b_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$, pak úloha (4.2) nemá přípustné řešení.*

Důkaz: Daná podmínka znamená, že souhrn požadavků zákazníků je různý od souhrnu kapacitu všech skladů. Podmínky tedy nelze splnit všechny najednou jako rovnosti. Buď požadavek některého ze zákazníků nebude plně uspokojen, nebo v některém skladě zůstane nevyužitá zásoba suroviny.

Q.E.D.

Lemma 4.5 *Pokud $a_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $b_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, pak úloha (4.2) má přípustné řešení.*

Důkaz: Přípustné řešení lze opět nalézt metodou severozápadního rohu.

Q.E.D.

Věta 4.6: *Pokud $a_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $b_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, pak úloha (4.2) má optimální řešení.*

Důkaz: Podle lemmatu 4.5 má, za platnosti předpokladů věty, úloha (4.2) přípustné řešení.
Množina přípustných řešení je kompaktní, neboť je uzavřená a $0 \leq x_{i,j} \leq a_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$.
Tudíž úloha (4.2) má optimální řešení, protože spojitá funkce má na neprázdném kompaktu globální minimum.

Q.E.D.

Vyvážený dopravní problém je úlohou lineárního programování ve standardním tvaru. Lze proto k nalezení jejího optimálního řešení použít simplexovou metodu. Jetu však jeden háček, matice soustavy podmínek je typu $\mathbb{R}^{(n+m)\times(n\cdot m)}$ a má hodnost $n+m-1$. Není tedy splněna podmínka plné řádkové hodnosti, která je potřebná pro použití simplexového algoritmu. V úloze vyváženého dopravního problému však platí, že vyškrtnutím jedné podmínky (je jedno které), získáme úlohu s maticí soustavy plné řádkové hodnosti. Takže po vyškrtnutí jednoho omezení je možné použít simplexový algoritmus přímo. To však není nutné, neboť existuje modifikace simplexového algoritmu, která využívá speciální struktury úlohy vyváženého dopravního problému. Nyní se s toto modifikací seznámíme.

Nejdříve si uvědomme tvar duální úlohy k úloze (4.2)

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizovat} & \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \\ \text{za podmínek} & u_i + v_j \leq c_{i,j} \quad \forall\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m. \end{array} \tag{4.3}$$

Modifikace simplexové metody pro vyvážený dopravní problém je nazývána metoda řádkových a sloupcových čísel. Je založena, ostatně jako každá modifikace simplexové metody, na současném prověřování primární a duální přípustnosti zvolené báze. Pro popis algoritmu si označíme $J = \{(i,j) : i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m\}$.

Nyní popišme jednotlivé kroky algoritmu.

Metoda řádkových a sloupcových čísel

KROK 0: Nalezneme výchozí primárně přípustnou bázi $L_0 \subset J$, $\operatorname{card}(L_0) = n+m-1$. Například pomocí metody severozápadního rohu.

KROK 1: Máme k dispozici primárně přípustnou bázi $L_t \subset J$, $\operatorname{card}(L_t) = n+m-1$. Vyřešíme soustavu rovnic

$$u_i + v_j = c_{i,j} \quad \forall\ (i,j) \in L_t.$$

Výsledkem jsou řádková čísla $u_i^*, i=1,\dots,m$ a sloupcová čísla $v_j^*, j=1,\dots,n$.

KROK 2: Pokud

$$u_i^* + v_j^* \leq c_{i,j} \quad \forall\ (i,j) \in J,$$

potom jdeme na **END 1**.

V opačném případě najdeme $(\iota,\kappa) \in J$ takové, že $u_\iota^* + v_\kappa^* > c_{\iota,\kappa}$ a pokračujeme **KROK 3**.

KROK 3: Najdeme cestu $(i_0,j_0),(i_1,j_1),\dots,(i_{2D},j_{2D}) \in J$ takovou, že

- $i_0 = i_{2D} = \iota$, $j_0 = j_{2D} = \kappa$.
- Pro $d=0,1,\dots,D$ je $i_{2*d+1} = i_{2*d+2}$ a $j_{2*d} = j_{2*d+1}$.
- $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\dots,(i_{2D-1},j_{2D-1}) \in L_t$.

Najdeme $\Delta \in \{0,1,\dots,D-1\}$ tak, že

$$x\left(L_t\right)_{i_{2\Delta+1},j_{2\Delta+1}} = \min\left\{x\left(L_t\right)_{i_{2d+1},j_{2d+1}} : d=0,1,\dots,D-1\right\}.$$

Položíme $L_{t+1} = (L_t \cup \{(\iota,\kappa)\}) \setminus \{(i_{2\Delta+1},j_{2\Delta+1})\}$.

Pak L_{t+1} je primárně přípustná báze a vracíme se na **KROK 1**.

END 1: Nalezená báze L_t je optimální a proto $x(L_t)$ je optimálním řešením úlohy (4.2).

◇

Algoritmus si demonstrujme na příkladě.

Příklad 4.7: Uvažujme dopravní problém s třemi sklady S1, S2, S3 a čtyřmi zákazníky Z1, Z2, Z3, Z4. Kapacity skladů jsou 5, 4, 3, požadavky zákazníků 4, 2, 4, 2 a náklady na přepravu jednotky zboží ze skladu k zákazníkovi jsou uvedeny v matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad vyřešíme metodou řádkových a sloupcových čísel.

Nejdříve nalezneme přípustné bazické řešení pomocí metody severozápadního rohu. Sestavme tabulku

	Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
S1					5
S2					4
S3					3
požadavek	4	2	4	2	

Tabulku začneme vyplňovat od levého horního rohu (severozápad na mapě).

	Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
S1	4				$\cancel{5}$ 1
S2					4
S3					3
požadavek	$\cancel{4}$	2	4	2	

	Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
S1	4	1			$\cancel{5}$ $\cancel{1}$
S2					4
S3					3
požadavek	$\cancel{4}$	$\cancel{2}$ 1	4	2	

	Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
S1	4	1			$\cancel{5}$ $\cancel{1}$
S2		1			$\cancel{4}$ 3
S3					3
požadavek	$\cancel{4}$	$\cancel{2}$ $\cancel{1}$	4	2	

Postupně tak dospějeme k tabulce

	Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
S1	4	1			$\cancel{5}\ \cancel{1}$
S2		1	3		$\cancel{4}\ \cancel{3}$
S3			1	2	$\cancel{3}\ \cancel{2}$
požadavek	$\cancel{4}$	$\cancel{2}\ \cancel{1}$	$\cancel{4}\ \cancel{1}$	$\cancel{2}$	

Přípustné řešení jsme nalezli a tak můžeme začít hledat řešení optimální. Opíšeme tabulku s nalezeným přípustným řešením a u každé veličiny si do levého horního rohu poznamenáme její koeficient v účelové funkci

	Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
S1	2 4	2 1	1	1	5
S2	1	1 1	2 3	1	4
S3	1	2	1 1	2 2	3
požadavek	4	2	4	2	

Náklady na realizaci tohoto přípustného řešení jsou

$$2*4+2*1+1*1+2*3+1*1+2*2=8+2+1+6+1+4=22.$$

Nyní vypočteme řádková a sloupcová čísla a prověříme kritérium optimality. Tabulku rozšíříme o jeden sloupec pro řádková čísla a o jednu řádku pro čísla sloupcová. Součet řádkového a sloupcového čísla budeme zapisovat do pravého horního rohu k odpovídající veličině.

	v	2	2	3	4	
u		Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
0	S1	2 2 4	2 2 1	1 3?	1 4?	5
-1	S2	1 1	1 1 1	2 2 3	1 3?	4
-2	S3	1 0	2 0	1 1 1	2 2 2	3
	požadavek	4	2	4	2	

Kritérium je porušeno u tří veličin (v tabulce je u nesplněného kritéria otazník). Je to pro indexy (S1,Z3), (S1,Z4) a (S2,Z4). Kterýkoli z nich můžeme vybrat a zařadit do báze. Vyberme si (S1,Z3). Hledaná cesta v tabulce je pak $(S1,Z3)\rightarrow(S2,Z3)\rightarrow(S2,Z2)\rightarrow(S1,Z2)\rightarrow(S1,Z3)$. Po této cestě přesuneme jednu jednotku zboží a znuluje se nám pozice (S1,Z2). Tu vyřadíme z báze a místo ní zařadíme (S1,Z3). Přepočteme tabulku.

	v	0	-2	-1	0	
u		Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
2	S1	2 2 4	2 0	1 1 1	1 2?	5
3	S2	1 3?	1 1 2	2 2 2	1 3?	4
2	S3	1 2?	2 0	1 1 1	2 2 2	3
	požadavek	4	2	4	2	

Náklady na realizaci tohoto přípustného řešení jsou

$$2 * 4 + 1 * 1 + 1 * 2 + 2 * 2 + 1 * 1 + 2 * 2 = 8 + 1 + 2 + 4 + 1 + 4 = 20.$$

Vybereme (S3,Z1), pak cesta v tabulce je $(S3, Z1) \to (S3, Z3) \to (S1, Z3) \to (S1, Z1) \to (S3, Z1)$. Po této cestě přesuneme jednu jednotku zboží a znuluje se nám pozice (S3,Z3). Tu vyřadíme z báze a místo ní zařadíme (S3,Z1). Přepočteme tabulku.

	v	2	0	1	3	
u		Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
0	S1	2 2 3	2 0	1 1 2	1 3?	5
1	S2	1 3?	1 1 2	2 2 2	1 4?	4
-1	S3	1 1 1	2 -1	1 0	2 2 2	3
	požadavek	4	2	4	2	

Náklady na realizaci tohoto přípustného řešení jsou

$$2 * 3 + 1 * 2 + 1 * 2 + 2 * 2 + 1 * 1 + 2 * 2 = 6 + 2 + 2 + 4 + 1 + 4 = 19.$$

Vybereme (S2,Z4), pak cesta v tabulce bude docela dlouhá $(S2, Z4) \to (S3, Z4) \to (S3, Z1) \to (S1, Z1) \to (S3, Z1) \to (S2, Z3) \to (S2, Z4)$. Po této cestě přesuneme dvě jednotky zboží a znulují se nám pozice (S2,Z3) a (S3,Z4). Narazili jsme na degeneraci. Existuje řada způsobů, jak postupovat při degeneraci dále. Jednou z možností je náhodná volba mezi (S2,Z3) a (S3,Z4). Řekněme, že jsme se rozhodli z báze vyřadit (S2,Z3) a v bázi ponechat (S3,Z4). Proto ponecháme v tabulce u (S3,Z4) vypsanou hodnotu nula. Přepočteme tabulku.

	v	1	2	0	2	
u		Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
1	S1	2 2 1	2 3?	1 1 4	1 3?	5
-1	S2	1 0	1 1 2	2 -1	1 1 2	4
0	S3	1 1 3	2 2	1 0	2 2 0	3
	požadavek	4	2	4	2	

Náklady na realizaci tohoto přípustného řešení jsou

$$2*1+1*4+1*2+1*2+1*3+2*0 = 2+4+2+2+3+0 = 13.$$

Vybereme (S1,Z4), pak cesta v tabulce bude $(S1, Z4) \to (S3, Z4) \to (S3, Z1) \to (S1, Z1) \to (S1, Z4)$. Po této cestě přesuneme nula jednotek zboží a pozice (S3,Z4) z báze vyřadíme. Přepočteme tabulku.

	v	1	0	0	0	
u		Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
1	S1	2 2 1	2 1	1 1 4	1 1 0	5
1	S2	1 2?	1 1 2	2 1	1 1 2	4
0	S3	1 1 3	2 0	1 0	2 0	3
	požadavek	4	2	4	2	

Náklady na realizaci tohoto přípustného řešení jsou

$$2*1+1*4+1*0+1*2+1*2+1*3 = 2+4+0+2+2+3 = 13.$$

Kritérium je porušeno pouze v jednom případě a tak do báze zařazujeme (S2,Z1), pak cesta v tabulce bude $(S2, Z1) \to (S2, Z4) \to (S1, Z4) \to (S1, Z1) \to (S2, Z2)$. Po této cestě přesuneme jednu jednotku zboží a pozice (S1,Z1) se znuluje a tak ji z báze vyřadíme. Přepočteme tabulku.

	v	1	1	1	1	
u		Z1	Z2	Z3	Z4	kapacita
0	S1	2 1	2 1	1 1 4	1 1 1	5
0	S2	1 1 1	1 1 2	2 1	1 1 1	4
0	S3	1 1 3	2 1	1 1	2 1	3
	požadavek	4	2	4	2	

Kritérium optimality je splněno. Našli jsme tedy optimální plán dopravy:

- ze skladu S1 přepravit 4 jednotky zákazníkovi Z3 a 1 jednotku zákazníkovi Z4,
- ze skladu S2 přepravit 1 jednotku zákazníkovi Z1, 2 zákazníkovi Z2 a 1 jednotku zákazníkovi Z4,
- ze skladu S3 přepravit 3 jednotky zákazníkovi Z1.

Náklady na realizaci tohoto přípustného řešení jsou

$$1 * 4 + 1 * 1 + 1 * 1 + 1 * 2 + 1 * 1 + 1 * 3 = 4 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 = 12.$$

△

Důležité poznatky:

- Hodnost matice soustavy pro dopravní problém je $m + n - 1$, nedegenerovaná bazická řešení mají tedy $m + n - 1$ nenulových složek.
- Pro celočíselné hodnoty pravých stran jsou všechna bazická řešení celočíselná.
- Pro celočíselné hodnoty pravých stran simplexová metoda (neboli metoda řádkových a sloupcových čísel) nalezne vždy celočíselné optimální řešení.
- Vždy existuje optimální řešení.

Podobné vlastnosti jako dopravní problém mají i další speciální úlohy lineárního programování. Například úlohy o toku sítí nebo některé další optimalizační úlohy na grafech. I pro ně jsou známé podmínky na vstupní data, při kterých jsou všechna bazická přípustná řešení celočíselná. To znamená, že simplexová metoda najde vždy celočíselné optimální řešení. Věta o dualitě má pro tyto úlohy speciální tvar a simplexová metoda speciální modifikaci.

Pro obecnou úlohu lineárního programování simplexová metoda nevede automaticky na celočíselné optimální řešení a celočíselnosti řešení lze dosáhnout za cenu numericky dosti náročných dodatečných postupů. Jedním z nich je metoda větvení a mezí, kterou používá GAMS.

Na závěr kapitoly si ještě uveďme, že v případě $c_{i,j} \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ lze optimální řešení uvolněného dopravního problému nalézt řešením vhodného vyváženého dopravního problému.

Nejdříve si uvědomme, že optimální bazická řešení úlohy (4.1) musí nutně plnit požadavky odběratelů přesně. Heuristicky můžeme říci, že „ Dodání nadbytečného množství suroviny je zbytečné. Pouze prodražuje přepravu.“. Stačí tedy řešit úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \\ \text{za podmínek} & \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq a_i \quad \forall\ i=1,\dots,n, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j \quad \forall\ j=1,\dots,m, \\ & x_{i,j} \geq 0 \quad \forall\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m. \end{array} \tag{4.4}$$

Zavedením fiktivního odběratele č.$m+1$ s nulovými náklady na dopravu, tj. $c_{1,m+1} = \ldots = c_{n,m+1} = 0$, a s požadavkem $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$, dostaneme úlohu vyváženého dopravního problému

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \\ \text{za podmínek} & \sum_{j=1}^{m+1} x_{i,j} = a_i \quad \forall\ i=1,\dots,n, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j \quad \forall\ j=1,\dots,m+1, \\ & x_{i,j} \geq 0 \quad \forall\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m+1. \end{array} \tag{4.5}$$

Nalezením optimálního řešení úlohy (4.5), např. metodou řádkových a sloupcových čísel, nalezneme optimální řešení úlohy (4.1).

Kapitola 5

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

V této kapitole se budeme zabývat teorií her dvou hráčů s nulovým součtem.

Definice 5.1 *Trojici* $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; \mathsf{K}\}$ *nazveme hrou dvou hráčů s nulovým součtem, když* X *jsou strategie I. hráče,* Y *jsou strategie II. hráče a* $\mathsf{K} : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathbb{R}$ *je výplata I. hráče.*

To znamená, že když I. hráč zvolí strategii $x \in \mathsf{X}$ *a II. hráč zvolí strategii* $y \in \mathsf{Y}$*, pak výplata I. hráče je* $\mathsf{K}(x, y)$ *a výplata II. hráče je* $-\mathsf{K}(x, y)$*.*

Hra je hrána tak, že ani jeden z hráčů při volbě své strategie nemá k dispozici žádnou informaci o volbě protihráče. Oba hráči zahrají své zvolené strategie a výplatní funkce určí výhru či prohru hráče.

Jako příklad her dvou hráčů s nulovým součtem si můžeme uvést šachy, dámu, hru „ kámen-nůžky-papír“, atd. Jako hru můžeme také chápat působení lidské společnosti na přírodu, ekonomicko-politický vztah dvou sousedních států, sestavení výrobního plánu podniku (zde je protihráčem okolní ekonomické prostředí), atd.

Definice 5.2 *Pro* $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; \mathsf{K}\}$ *hru dvou hráčů s nulovým součtem definujeme*

$$\text{\textit{horní ocenění hry}} \qquad \overline{\mathbf{v}}^* = \inf_{y \in \mathsf{Y}} \sup_{x \in \mathsf{X}} \mathsf{K}(x, y), \tag{5.1}$$

$$\text{\textit{dolní ocenění hry}} \qquad \underline{\mathbf{v}}^* = \sup_{x \in \mathsf{X}} \inf_{y \in \mathsf{Y}} \mathsf{K}(x, y), \tag{5.2}$$

$$\text{\textit{horní cenu hry}} \qquad \overline{\mathbf{v}} = \min_{y \in \mathsf{Y}} \sup_{x \in \mathsf{X}} \mathsf{K}(x, y), \tag{5.3}$$

$$\text{\textit{dolní cenu hry}} \qquad \underline{\mathbf{v}} = \max_{x \in \mathsf{X}} \inf_{y \in \mathsf{Y}} \mathsf{K}(x, y). \tag{5.4}$$

Pokud dolní a horní cena hry existuje a platí $\underline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}$*, pak říkáme, že hra má cenu* $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}$*.*
Řekneme, že

$$\widehat{x} \in \mathsf{X} \text{ \textit{je optimální strategie I. hráče, pokud} } \quad \forall\, y \in \mathsf{Y}: \ \mathsf{K}(\widehat{x}, y) \ge \underline{\mathbf{v}}^*, \tag{5.5}$$

$$\widehat{y} \in \mathsf{Y} \text{ \textit{je optimální strategie II. hráče, pokud} } \quad \forall\, x \in \mathsf{X}: \ \mathsf{K}(x, \widehat{y}) \le \overline{\mathbf{v}}^*. \tag{5.6}$$

Uvědomme si význam a důležité vztahy mezi zavedenými pojmy.

Nejprve si povšimněme, že horní ocenění hry je vlastně nejnižší zaručená výhra I. hráče, pokud by před volbou své strategie znal přesně strategii zvolenou II. hráčem. Obdobně dolní ocenění hry je vlastně nejvyšší zaručená prohra II. hráče, pokud by před volbou své strategie znal přesně strategii zvolenou I. hráčem.

Nyní již ke vztahům mezi zavedenými pojmy.

Lemma 5.3 *Pro každou* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};\mathsf{K}\}$ *hru dvou hráčů s nulovým součtem vždy existuje její dolní i horní ocenění. Navíc platí* $\underline{\mathbf{v}}^* \le \overline{\mathbf{v}}^*$.

Důkaz: Pro každé $\tilde{x} \in \mathsf{X}$, $\tilde{y} \in \mathsf{Y}$ platí odhady

$$\begin{aligned} \inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(\tilde{x},y) &\le \mathsf{K}(\tilde{x},\tilde{y}),\\ \sup_{x\in\mathsf{X}}\inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) &\le \sup_{x\in\mathsf{X}} \mathsf{K}(x,\tilde{y}),\\ \underline{\mathbf{v}}^* = \sup_{x\in\mathsf{X}}\inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) &\le \inf_{y\in\mathsf{Y}}\sup_{x\in\mathsf{X}} \mathsf{K}(x,y) = \overline{\mathbf{v}}^*. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 5.4 *Nechť* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};\mathsf{K}\}$ *je hra dvou hráčů s nulovým součtem. Pak platí.*

i) Existuje alespoň jedna optimální strategie I. hráče tehdy a jen tehdy, když existuje dolní cena hry.

ii) Existuje alespoň jedna optimální strategie II. hráče tehdy a jen tehdy, když existuje horní cena hry.

Důkaz:

1. Nechť $\widehat{x} \in \mathsf{X}$ je optimální strategie prvého hráče. Pak platí

$$\underline{\mathbf{v}}^* \le \inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(\widehat{x},y) \le \sup_{x\in\mathsf{X}}\inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) = \underline{\mathbf{v}}^*.$$

   Tudíž hra má dolní cenu a platí

$$\underline{\mathbf{v}}^* = \inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(\widehat{x},y) = \max_{x\in\mathsf{X}}\inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) = \underline{\mathbf{v}}.$$

2. Nechť má hra dolní cenu. Pak existuje $\widehat{x} \in \mathsf{X}$ takové, že platí

$$\underline{\mathbf{v}}^* = \max_{x\in\mathsf{X}}\inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) = \inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(\widehat{x},y).$$

   Tudíž platí

$$\underline{\mathbf{v}}^* \le \inf_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(\widehat{x},y)$$

   a to znamená, že $\widehat{x}$ je optimální strategie I. hráče.

Ekvivalentní vyjádření existence optimální strategie II. hráče se ukáže obdobně.

Q.E.D.

Věta 5.5: *Nechť* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};\mathsf{K}\}$ *je hra dvou hráčů s nulovým součtem. Když* X, Y *jsou kompaktní metrické prostory a* K *je spojitá funkce, pak existuje dolní i horní cena hry. Navíc platí*

$$\text{pro každé } x\in\mathsf{X} \text{ existuje } y^*(x)\in\mathsf{Y} \text{ tak, že } \mathsf{K}(x,y^*(x)) = \min_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

$$\text{pro každé } y\in\mathsf{Y} \text{ existuje } x^*(y)\in\mathsf{X} \text{ tak, že } \mathsf{K}(x^*(y),y) = \max_{x\in\mathsf{X}} \mathsf{K}(x,y) \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \max_{x\in\mathsf{X}}\min_{y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y) \in \mathbb{R}, \tag{5.9}$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \min_{y\in\mathsf{Y}}\max_{x\in\mathsf{X}} \mathsf{K}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Důkaz: Stačí ukázat tvrzení pouze pro dolní cenu hry. Pro horní cenu hry je situace obdobná.

1. Výplatní funkce je spojitá a $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ je kompakt. Pak výplatní funkce nabývá na $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ svého maxima a minima, to znamená

$$\max_{x\in\mathsf{X},y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y)\in\mathbb{R},\qquad \min_{x\in\mathsf{X},y\in\mathsf{Y}} \mathsf{K}(x,y)\in\mathbb{R}.$$

   Tudíž $\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^* \in \mathbb{R}$.

2. Vezměme $x\in\mathsf{X}$. Z předchozího bodu důkazu víme, že $\inf_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x,y)\in\mathbb{R}$.
   Pak existuje posloupnost $y^{(n)}\in\mathsf{Y}$, $n\in\mathbb{N}$ taková, že $\mathsf{K}\left(x,y^{(n)}\right) < \inf_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x,y)+\frac{1}{n}$.
   Množina Y je kompaktní, a proto existuje hromadný bod této posloupnosti; označme jej y^*.
   Existuje tedy nějaká podposloupnost s vlastností $y^{(n_k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y^*\in\mathsf{Y}$.
   Spojitost výplatní funkce zajišťuje $\mathsf{K}\left(x,y^{(n_k)}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{K}(x,y^*)$.
   Zároveň $\mathsf{K}\left(x,y^{(n_k)}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \inf_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x,y)$ a tudíž $\mathsf{K}(x,y^*)=\min_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x,y)$.

3. Již víme, že $\underline{\mathbf{v}}^* = \sup_{x\in\mathsf{X}}\min_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x,y)$.
   Existuje proto posloupnost $x^{(n)}\in\mathsf{X}$, $\tilde{y}^{(n)}\in\mathsf{Y}$, $n\in\mathbb{N}$ taková, že

$$\inf_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}\left(x^{(n)},y\right) > \underline{\mathbf{v}}^* - \frac{1}{n},\quad \mathsf{K}\left(x^{(n)},\tilde{y}^{(n)}\right) = \inf_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}\left(x^{(n)},y\right).$$

   Z kompaktnosti množiny $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ existuje $(x^*,y^*)\in\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ hromadný bod posloupnosti $(x^{(n)},\tilde{y}^{(n)})$.
   Existuje tedy nějaká podposloupnost s vlastností $x^{(n_k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x^*\in\mathsf{X}$, $\tilde{y}^{(n_k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y^*\in\mathsf{Y}$.
   Spojitost výplatní funkce zajišťuje $\mathsf{K}\left(x^{(n_k)},\tilde{y}^{(n_k)}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{K}(x^*,y^*)$ a

$$\forall\, y\in\mathsf{Y}\quad \mathsf{K}(x^*,y^*) = \lim_{k\to+\infty}\mathsf{K}\left(x^{(n_k)},\tilde{y}^{(n_k)}\right) \le \lim_{k\to+\infty}\mathsf{K}\left(x^{(n_k)},y\right) = \mathsf{K}(x^*,y).$$

   Tudíž $\mathsf{K}(x^*,y^*)=\min_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x^*,y)$.
   Zároveň $\mathsf{K}\left(x^{(n_k)},\tilde{y}^{(n_k)}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \underline{\mathbf{v}}^*$ a tudíž $\mathsf{K}(x^*,y^*)=\underline{\mathbf{v}}^*$.
   Ověřili jsme, že dolní cena hry existuje a že platí $\underline{\mathbf{v}} = \mathsf{K}(x^*,y^*) = \max_{x\in\mathsf{X}}\min_{y\in\mathsf{Y}}\mathsf{K}(x,y)\in\mathbb{R}$.

Q.E.D.

Věta 5.6: *Hra* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};\mathsf{K}\}$ *má cenu tehdy a jen tehdy, když její výplatní funkce* K *má sedlový bod, tj. existuje* $\widehat{x}\in\mathsf{X}$ *a* $\widehat{y}\in\mathsf{Y}$ *takové, že*

$$\forall\ x\in\mathsf{X},\ \forall\ y\in\mathsf{Y}\quad \textit{platí}\quad \mathsf{K}(x,\widehat{y}) \le \mathsf{K}(\widehat{x},\widehat{y}) \le \mathsf{K}(\widehat{x},y). \tag{5.11}$$

Pak $\widehat{x}$ *je optimální strategie I. hráče,* $\widehat{y}$ *je optimální strategie II. hráče a cena hry je* $\mathbf{v}=\mathsf{K}(\widehat{x},\widehat{y})$.

Důkaz:

1. Nechť má hra cenu. Pak víme, že pro oba hráče existují optimální strategie $\widehat{x} \in \mathsf{X}$, $\widehat{y} \in \mathsf{Y}$ a
$$\forall\ x \in \mathsf{X},\ \forall\ y \in \mathsf{Y} \quad \text{platí} \quad \mathsf{K}(x, \widehat{y}) \le \mathbf{v} \le \mathsf{K}(\widehat{x}, y)\,.$$
Odtud $\mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y}) \le \mathbf{v} \le \mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y})$ neboli $\mathbf{v} = \mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y})$.
Jinak řečeno, bod $(\widehat{x}, \widehat{y})$ je sedlový bod výplatní funkce K.
2. Nechť bod $(\widehat{x}, \widehat{y})$ je sedlový bod výplatní funkce K.
Pak platí
$$\begin{aligned} \mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \min_{y \in \mathsf{Y}} \mathsf{K}(\widehat{x}, y) \le \sup_{x \in \mathsf{X}} \inf_{y \in \mathsf{Y}} \mathsf{K}(x, y) = \underline{\mathbf{v}}^*, \\ \mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \max_{x \in \mathsf{X}} \mathsf{K}(x, \widehat{y}) \ge \inf_{y \in \mathsf{Y}} \sup_{x \in \mathsf{X}} \mathsf{K}(x, y) = \overline{\mathbf{v}}^*. \end{aligned}$$
Vzhledem k tomu, že vždy $\underline{\mathbf{v}}^* \le \overline{\mathbf{v}}^*$, jsme zjistili, že
$$\mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \max_{x \in \mathsf{X}} \inf_{y \in \mathsf{Y}} \mathsf{K}(x, y) = \min_{y \in \mathsf{Y}} \sup_{x \in \mathsf{X}} \mathsf{K}(x, y) = \underline{\mathbf{v}}^* = \overline{\mathbf{v}}^* = \underline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}.$$
Hra má tedy cenu $\mathbf{v} = \mathsf{K}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\widehat{x}$ je optimální strategie I. hráče a $\widehat{y}$ je optimální strategie II. hráče.

Q.E.D.

Věta 5.7 (O minimaxu): *Nechť $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; \mathsf{K}\}$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem. Když $\mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathsf{Y} \subset \mathbb{R}^m$ jsou neprázdné kompaktní konvexní množiny a K je spojitá funkce, konkávní v x a konvexní v y, pak existuje cena hry a každý z hráčů má alespoň jednu optimální strategii.*

Důkaz: Viz [6].

Q.E.D.

Povšimněme si, že globální podmínky optimality pro úlohu (NLP), viz definice 2.4, navržené jako postup pro řešení úlohy (NLP), jsou vlastně speciálním případem hry dvou hráčů s nulovým součtem. My, jako řešitelé úlohy (NLP), vystupujeme jako II.hráč a vybíráme vhodné Lagrangeovy multiplikátory, I.hráč (Příroda, „ náš nepřítel“) vybírá přípustné řešení úlohy (NLP) a Lagrangeova funkce je výplatní funkcí této hry. Věty 5.7, 2.5 a 2.7 jsou si tudíž velmi blízko. Nejsou však jedna zvláštním případem druhé, neboť mají různé předpoklady. Věta 5.7 vyžaduje kompaktnost množin přípustných strategií, což by byl omezující předpoklad na úlohu (NLP).

5.1 Maticové hry

Speciálním typem her dvou hráčů s nulovým součtem jsou hry maticové.

Definice 5.8 *Budeme říkat, že $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; A\}$ je <u>maticová hra</u>, jestliže $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je matice,*
$$\mathsf{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, n \right\}, \tag{5.12}$$
$$\mathsf{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j = 1, 2, \dots, m \right\}, \tag{5.13}$$
jestliže $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; \mathsf{K}\}$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem, kde $\mathsf{K}(x, y) = x^\top A y$.

Lemma 5.9 *Množiny* X, Y *jsou simplexy a jsou tedy kompaktní konvexní množiny.*

Důkaz: Množiny strategií jsou evidentně simplexy.

Q.E.D.

Věta 5.10: *Maticová hra má vždy cenu a každý z hráčů má vždy alespoň jednu optimální strategii.*

Důkaz: Výplatní funkce $\mathsf{K}(x,y) = x^\top Ay$ je lineární v x, lineární v y a množiny strategií obou hráčů jsou neprázdné konvexní kompakty. Předpoklady věty 5.7 jsou splněny a proto existuje cena hry a každý z hráčů má alespoň jednu optimální strategii.

Q.E.D.

Věta 5.11: *Nechť* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ *je maticová hra a* $\mathbf{v}\in\mathbb{R}$, $x^*\in\mathsf{X}$, $y^*\in\mathsf{Y}$.

Pak hra má cenu $\mathbf{v}$, x^* *je optimální strategie I. hráče a* y^* *je optimální strategie II. hráče tehdy a jen tehdy, když* $\mathbf{v} = (x^*)^\top Ay^*$, $(x^*)^\top A \geq (\mathbf{v},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v})$ *a* $Ay^* \leq (\mathbf{v},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v})^\top$.

Důkaz: Podle věty 5.6 víme, že hra má cenu $\mathbf{v}$, x^* je optimální strategie I. hráče a y^* je optimální strategie II. hráče tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{v} = (x^*)^\top Ay^*$ a (x^*,y^*) je sedlový bod výplatní funkce $\mathsf{K}(x,y) = x^\top Ay$. K dokončení důkazu si proto stačí pouze uvědomit, že

$$\begin{aligned} (x^*)^\top A \geq (\mathbf{v},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, y\in\mathsf{Y}:\ (x^*)^\top Ay \geq \mathbf{v}, \\ Ay^* \leq (\mathbf{v},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v})^\top \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, x\in\mathsf{X}:\ x^\top Ay^* \leq \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 5.12 *Nechť* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ *je maticová hra, která má cenu* $\mathbf{v}$ *a* $\widehat{x}\in\mathsf{X}$, $\widehat{y}\in\mathsf{Y}$ *jsou optimální strategie I. a II. hráče.*

i) Když $\widehat{x}_i > 0$, *pak* $(A\widehat{y})_i = \mathbf{v}$.

ii) Když $\widehat{y}_j > 0$, *pak* $(\widehat{x}^\top A)_j = \mathbf{v}$.

Důkaz: Plyne okamžitě z toho, že $\widehat{x}^\top A\widehat{y} = \mathbf{v}$, $A\widehat{y} \leq (\mathbf{v},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v})^\top$, $\widehat{x}^\top A \geq (\mathbf{v},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v})^\top$, $\sum_{i=1}^n \widehat{x}_i = 1$, $\widehat{x}\geq 0$, $\sum_{j=1}^m \widehat{y}_j = 1$, $\widehat{y}\geq 0$.

Q.E.D.

Definice 5.13 *Říkáme, že maticová hra* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ *je spravedlivá, jestliže má nulovou cenu, tj.* $\mathbf{v} = 0$.

Definice 5.14 *Říkáme, že maticová hra* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ *je symetrická, jestliže* $\mathsf{X}=\mathsf{Y}$ *a* $A = -A^\top$.

Věta 5.15: *Symetrická maticová hra* $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ *je spravedlivá a oba hráči mají shodnou množinu optimálních strategií.*

Důkaz: Uvědomme si, že pro $x \in \mathsf{X} = \mathsf{Y}$ platí $x^\top Ax = -x^\top A^\top x = -x^\top Ax$. A tudíž $x^\top Ax = 0$. Jde tedy o spravedlivou hru, neboť cena hry je nulová.

Nechť $\widehat{x} \in \mathsf{X} = \mathsf{Y}$ je optimální strategie I. hráče.
To je ekvivalentní s tím, že $(\widehat{x})^\top A \geq \mathbf{0}^\top$.
To je ekvivalentní s tím, že $A\widehat{x} = -A^\top \widehat{x} \leq \mathbf{0}$.
To je ekvivalentní s tím, že $\widehat{x}$ je optimální strategie II. hráče.

Q.E.D.

Definice 5.16 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$. Budeme říkat, že a ostře dominuje b pokud $a_i > b_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Věta 5.17: *Nechť $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; A\}$ je maticová hra.*

- *Když řádek matice $A_{k,\bullet}$ je ostře dominován nějakou konvexní lineární kombinací ostatních řádků, pak každá optimální strategie I. hráče $\widehat{x} \in \mathsf{X}$ má $\widehat{x}_k = 0$.*
- *Když sloupec matice $A_{\bullet,k}$ ostře dominuje nějakou konvexní lineární kombinaci ostatních sloupců, pak každá optimální strategie II. hráče $\widehat{y} \in \mathsf{Y}$ má $\widehat{y}_k = 0$.*

Speciálně:

- *Když řádek matice $A_{k,\bullet}$ je ostře dominován řádkem $A_{l,\bullet}$, pak každá optimální strategie I. hráče $\widehat{x} \in \mathsf{X}$ má $\widehat{x}_k = 0$.*
- *Když sloupec matice $A_{\bullet,k}$ ostře dominuje sloupec $A_{\bullet,l}$, pak každá optimální strategie II. hráče $\widehat{y} \in \mathsf{Y}$ má $\widehat{y}_k = 0$.*

Důkaz: Tvrzení věty je ekonomicky jasné. I.hráč nebude využívat strategii, když má k dispozici kombinaci strategií, při níž získá více bez ohledu na to, jak bude postupovat II.hráč. Obdobně II.hráč nebude využívat strategii, když má k dispozici kombinaci strategií, při níž získá více (I.hráč získá méně) bez ohledu na to, jak bude postupovat I.hráč.

Q.E.D.

Příklad 5.18:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tudíž optimální strategie stačí hledat ve tvaru $\widehat{x} = (0, 0, x_3, x_4)^\top$, $\widehat{y} = (0, 0, y_3, y_4)^\top$ a strategie $(x_3, x_4)^\top$, $(y_3, y_4)^\top$ jsou optimálními strategiemi pro hru s výplatní maticí $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Pro optimální strategie platí

$$\begin{gathered} 5x_3 \geq \mathbf{v},\ x_3 + 7x_4 \geq \mathbf{v},\ 5y_3 + y_4 \leq \mathbf{v},\ 7y_4 \leq \mathbf{v}, \\ x_3 + x_4 = 1,\ y_3 + y_4 = 1,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0, \end{gathered}$$

Což vede k tomu, že

$$\min\{5x_3,\ x_3+7x_4\} = \mathbf{v} = \max\{5y_3+y_4,\ 7y_4\}.$$

Využitím toho, že $x_4 = 1 - x_3$, získáme

$$\min\{5x_3,\ 7-6x_3\} = \mathbf{v}.$$

Levá strana rovnosti je funkcí x_3. Můžeme si ji nakreslit a z obrázku vidíme, že nabývá svého maxima, když platí rovnost $5x_3 = 7 - 6x_3$. Odtud již dostáváme $x_3 = \frac{7}{11}$, $x_4 = \frac{4}{11}$ a $\mathbf{v} = \frac{35}{11}$.
Obdobným způsobem nebo z komplementarity dopočteme $y_3 = \frac{6}{11}$, $y_4 = \frac{5}{11}$.

Optimální strategie jsou $\left(0,0,\frac{7}{11},\frac{4}{11}\right)^\top$ pro I. hráče, $\left(0,0,\frac{6}{11},\frac{5}{11}\right)^\top$ pro II. hráče a cena hry je $\mathbf{v} = \frac{35}{11}$.

△

Příklad 5.19: Řešte graficky maticovou hru s výplatní maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Optimální strategie jsou $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^\top$ pro I. hráče, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,0\right)^\top$ pro II. hráče a cena hry je $\mathbf{v} = \frac{1}{3}$.

△

Mezi dualitou lineárního programování a maticovými hrami jsou užitečné vztahy.

Věta 5.20: *Nechť $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ je maticová hra, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$, $x^* \in \mathsf{X}$, $y^* \in \mathsf{Y}$ a uvažujme úlohy lineárního programování:*

$$\max\left\{ v\ :\ A^\top x - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \geq 0,\ v \in \mathbb{R} \right\}, \tag{5.14}$$

$$\min\left\{ w\ :\ Ay - \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} \leq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{m} y_i = 1,\ y \geq 0,\ w \in \mathbb{R} \right\}. \tag{5.15}$$

i) Pak hra má cenu $\mathbf{v}$ a x^* je optimální strategie I. hráče tehdy a jen tehdy, když $(x^*,\mathbf{v})$ je optimální řešení úlohy (5.14).

ii) Pak hra má cenu $\mathbf{v}$ a y^* je optimální strategie II. hráče tehdy a jen tehdy, když $(y^*,\mathbf{v})$ je optimální řešení úlohy (5.15).

Důkaz: K úloze (5.14) je duální úloha

$$\min\left\{ w\ :\ Az + \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ -\sum_{i=1}^{m} z_i = 1,\ z \leq 0,\ v \in \mathbb{R} \right\}. \tag{5.16}$$

Úlohy (5.15) a (5.16) jsou ekvivalentní, stačí pouze změnit znaménko $y = -z$.
Nyní s využitím duality úloh lineárního programování provedeme vlastní důkaz.

$(x^*, \mathbf{v})$ je optimální řešení (5.14)
$\Updownarrow$ $\longleftarrow$ [silná věta o dualitě]
$(x^*, \mathbf{v})$ je optimální řešení (5.14) existuje z, w tak, že (z, w) je optimální řešení (5.16)
$\Updownarrow$
$(x^*, \mathbf{v})$ je optimální řešení (5.14) existuje y tak, že $(y, \mathbf{v})$ je optimální řešení (5.15)
$\Updownarrow$ $\longleftarrow$ [věta 5.11]
hra má cenu $\mathbf{v}$, x^* je optimální strategie I. hráče a existuje optimální strategie II. hráče
$\Updownarrow$
hra má cenu $\mathbf{v}$, x^* je optimální strategie I. hráče

Obdobně lze dokázat tvrzení i pro druhého hráče.

Q.E.D.

Věta 5.21: *Nechť má maticová hra $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}; A\}$ kladnou cenu. $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$, $x^* \in \mathsf{X}$, $y^* \in \mathsf{Y}$ a uvažujme úlohy lineárního programování:*

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \,:\, A^\top \xi \geq \mathbf{1},\ \xi \geq 0\right\}, \tag{5.17}$$

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{m} \zeta_j \,:\, A\zeta \leq \mathbf{1},\ \zeta \geq 0\right\}. \tag{5.18}$$

i) Pak hra má cenu $\mathbf{v}$ a x^* je optimální strategie I. hráče tehdy a jen tehdy, když $\frac{1}{\mathbf{v}}x^*$ je optimální řešení úlohy (5.17).

ii) Pak hra má cenu $\mathbf{v}$ a y^* je optimální strategie II. hráče tehdy a jen tehdy, když $\frac{1}{\mathbf{v}}y^*$ je optimální řešení úlohy (5.18).

Pro úplnost ještě uveďme opačný převod.
Když ξ je optimální řešení úlohy (5.17), pak hra má cenu $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \xi_i}$ a optimální strategie I.hráče je $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \xi_i}\xi$.
Když ζ je optimální řešení úlohy (5.18), pak hra má cenu $\frac{1}{\sum_{j=1}^m \zeta_j}$ a optimální strategie II.hráče je $\frac{1}{\sum_{j=1}^m \zeta_j}\zeta$.

Důkaz: Tvrzení ukážeme pro I.hráče. Pro II.hráče je důkaz obdobný.
Podle věty 5.20 víme, že hra má cenu $\mathbf{v}$ a x^* je optimální strategie I. hráče tehdy a jen tehdy, když $(x^*, \mathbf{v})$ je optimální řešení úlohy (5.14). Úlohu (5.14) ekvivalentně přepíšeme.

$$\max\left\{v \,:\, A^\top x - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \geq 0,\ v \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\max\left\{ v \,:\, A^\top x - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \geq 0,\ v > 0 \right\},$$
$$\max\left\{ v \,:\, A^\top \left(\frac{1}{v} x\right) \geq \mathbf{1},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \geq 0,\ v > 0 \right\},$$
$$\max\left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i} \,:\, A^\top \xi \geq \mathbf{1},\ \xi \geq 0 \right\},$$
$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \,:\, A^\top \xi \geq \mathbf{1},\ \xi \geq 0 \right\}.$$

Tudíž hra má cenu $\mathbf{v}$ a x^* je optimální strategie I. hráče tehdy a jen tehdy, když $\frac{1}{\mathbf{v}} x^*$ je optimální řešení úlohy (5.17).

Q.E.D.

Existuje však i opačné přiřazení.

Věta 5.22: *Mějme symetrickou dvojici duálních úloh lineárního programování*

$$\min\left\{ c^\top x \,:\, Ax \geq b,\ x \geq 0 \right\}, \tag{5.19}$$
$$\max\left\{ b^\top y \,:\, A^\top y \leq c,\ y \geq 0 \right\} \tag{5.20}$$

a symetrickou maticovou hru s výplatní maticí

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -A & b \\ A^\top & \mathbf{0} & -c \\ -b^\top & c^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Úlohy (5.19), (5.20) mají optimální řešení tehdy a jen tehdy, když pro maticovou hru (5.21) existuje optimální strategie I. nebo II.hráče, jejíž poslední složka je kladná.

Důkaz:

1. Nechť $\widehat{x}$ a $\widehat{y}$ jsou optimální řešení dvojice duálních úloh (5.19), (5.20).

   Položme $\xi^* = \left(\frac{1}{\Delta} \widehat{y}^\top, \frac{1}{\Delta} (\widehat{x})^\top, \frac{1}{\Delta} \right)^\top$, kde $\Delta = 1 + \sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i + \sum_{j=1}^{m} \widehat{y}_j \geq 1$.

   Z teorie duality dostáváme

$$G\xi^* = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b - A\widehat{x} \\ A^\top \widehat{y} - c \\ c^\top \widehat{x} - b^\top \widehat{y} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}.$$

   Tudíž ξ^* je optimální strategie II.hráče ve hře (5.21) a její poslední složka je kladná.

2. Hra je symetrická. Pak podle věty 5.15 má nulovou cenu a oba hráči mají shodnou množinu optimálních strategií. Nechť $\hat{\xi} = \left(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3 \right)^\top$ je optimální strategie II.hráče ve hře (5.21) a její poslední složka je kladná. Pak optimální strategie splňuje

$$G\hat{\xi} = \begin{pmatrix} -A\hat{\xi}_2 + b\hat{\xi}_3 \\ A^\top \hat{\xi}_1 - c\hat{\xi}_3 \\ -b^\top \hat{\xi}_1 + c^\top \hat{\xi}_2 \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}.$$

Potom $x = \frac{1}{\hat{\xi}_3}\hat{\xi}_2$ je přípustné řešení úlohy (5.19) a $y = \frac{1}{\hat{\xi}_3}\hat{\xi}_1$ je přípustné řešení úlohy (5.20).
Navíc $c^\top x \le b^\top y$.
Podle věty o slabé dualitě víme, že $c^\top x \ge b^\top y$.
Proto $c^\top x = b^\top y$. Odtud x je optimální řešení (5.19) a y je optimální řešení (5.20).

Q.E.D.

5.2 Hry v čistých strategiích

Definice 5.23 *K maticové hře $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ budeme uvažovat maticovou hru v čistých strategiích $\left\{\tilde{\mathsf{X}},\tilde{\mathsf{Y}};A\right\}$, kde*

$$\tilde{\mathsf{X}} = \{\mathsf{e}_{1:n},\mathsf{e}_{2:n},\ldots,\mathsf{e}_{n:n}\}, \tag{5.22}$$
$$\tilde{\mathsf{Y}} = \{\mathsf{e}_{1:m},\mathsf{e}_{2:m},\ldots,\mathsf{e}_{m:m}\}. \tag{5.23}$$

Připomeňme, že $\mathsf{e}_{k:n}$ označuje jednotkový vektor.

Strategie $x \in \tilde{\mathsf{X}}$, $y \in \tilde{\mathsf{Y}}$ nazýváme čisté strategie.

Říkáme, že maticová hra $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ má cenu v čistých strategiích, pokud oba hráči mají čisté optimální strategie.

Věta 5.24: *Hra $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ má cenu $\mathbf{v}$ v čistých strategiích tehdy a jen tehdy, když hra $\left\{\tilde{\mathsf{X}},\tilde{\mathsf{Y}};A\right\}$ má cenu $\mathbf{v}$, množina všech optimálních strategií I.hráče ve hře $\left\{\tilde{\mathsf{X}},\tilde{\mathsf{Y}};A\right\}$ je rovna množině všech čistých optimálních strategií I.hráče ve hře $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$ a množina všech optimálních strategií II.hráče ve hře $\left\{\tilde{\mathsf{X}},\tilde{\mathsf{Y}};A\right\}$ je rovna množině všech čistých optimálních strategií II.hráče ve hře $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$.*

Důkaz: Vezměme čisté strategie $\mathsf{e}_{k:n} \in \tilde{\mathsf{X}}$ a $\mathsf{e}_{l:m} \in \tilde{\mathsf{Y}}$, pak je ekvivalentní

$\mathsf{e}_{k:n}$ je optimální strategie I. hráče a $\mathsf{e}_{l:m}$ je optimální strategie II. hráče ve hře $\{\mathsf{X},\mathsf{Y};A\}$
$\Updownarrow \quad \longleftarrow$ [věta 5.11]
$\forall\, j = 1,2,\ldots,m: \ (\mathsf{e}_{k:n}^\top A)_j = A_{k,j} \ge \mathbf{v}$,
$\forall\, i = 1,2,\ldots,n: \ (A\,\mathsf{e}_{l:m})_i = A_{i,l} \le \mathbf{v}$
$\Updownarrow$
$\mathsf{e}_{k:n}$ je optimální strategie I. hráče a $\mathsf{e}_{l:m}$ je optimální strategie II. hráče ve hře $\left\{\tilde{\mathsf{X}},\tilde{\mathsf{Y}};A\right\}$

Q.E.D.

Věta 5.25: *Maticová hra v čistých strategiích $\left\{\tilde{\mathsf{X}},\tilde{\mathsf{Y}};A\right\}$ má vždy dolní a horní cenu a platí*

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{v}} &= \min\{\max\{A_{i,j} : i = 1,2,\ldots,n\} : j = 1,2,\ldots,m\},\\ \underline{\mathbf{v}} &= \max\{\min\{A_{i,j} : j = 1,2,\ldots,m\} : i = 1,2,\ldots,n\}.\end{aligned}$$

Dále optimální strategie I. hráče $\mathsf{e}_{k:n}$ a optimální strategie II. hráče $\mathsf{e}_{l:m}$ splňují

$$\begin{aligned}\forall j = 1,2,\ldots,m \quad A_{k,j} &\ge \underline{\mathbf{v}},\\ \forall i = 1,2,\ldots,n \quad A_{i,l} &\le \overline{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

Důkaz: Oba hráči mají pouze konečný počet strategií. Proto se všechna potřebná suprema i infima nabývají a horní i dolní cena hry existují. Vyjádření horní a dolní ceny hry a popis optimálních strategií plyne přímo z definice 5.2 a z tvaru výplatní funkce.

Q.E.D.

Věta 5.26: *Maticová hra v čistých strategiích* $\left\{\tilde{\mathsf{X}}, \tilde{\mathsf{Y}}; A\right\}$ *má cenu tehdy a jen tehdy, když matice* A *má sedlový bod; tj. existují indexy* k*,* l *takové, že*

$$A_{k,l} = \min\left\{A_{k,j} \; : \; j = 1, 2, \ldots, m\right\} = \max\left\{A_{i,l} \; : \; i = 1, 2, \ldots, n\right\}. \tag{5.24}$$

Potom cena hry je rovna $A_{k,l}$*,* $\mathsf{e}_{k:n}$ *je optimální strategie I. hráče a* $\mathsf{e}_{l:m}$ *je optimální strategie II. hráče.*

Důkaz:

$\mathbf{v}$ je cena hry, $\mathsf{e}_{k:n}$ je optimální strategie I. hráče a $\mathsf{e}_{l:m}$ je optimální strategie II. hráče
$\Updownarrow \quad \longleftarrow$ [věta 5.25]
$\forall\ j = 1, 2, \ldots, m : \ A_{k,j} \geq \mathbf{v}$,
$\forall\ i = 1, 2, \ldots, n : \ A_{i,l} \leq \mathbf{v}$
$\Updownarrow$
$\mathbf{v} = A_{k,l} = \min\left\{A_{k,j} \; : \; j = 1, 2, \ldots, m\right\} = \max\left\{A_{i,l} \; : \; i = 1, 2, \ldots, n\right\}$

Q.E.D.

Kapitola 6

Výpočetní algoritmy pro řešení optimalizačních úloh

Minimalizační a maximalizační úlohy řešíme pomocí výpočetních algoritmů. Zatím známe:

1. Simplexová metoda.
2. Wolfeho algoritmus.
3. Gradientní metoda na přímce bez omezení.
4. Newtonova metoda na přímce bez omezení.

Algoritmy dělíme podle několika hledisek.

I) Podle toho, zda využívají náhodného rozhodování: deterministické a stochastické.

II) Podle toho, zda konstruují posloupnost přibližných řešení, která jsou přípustnými řešeními dané úlohy, či nikoli: vnitřního bodu ($x^* \in \mathbf{M}$) a vnějšího bodu ($x^* \notin M$).

III) Podle toho, jaký řád derivace algoritmus využívá: přímé (funkční hodnoty), gradientní (gradienty) a newtonovské (matice druhých derivací).

Výběr a sestavování algoritmu pro konkrétní optimalizační úlohu by měl brát v úvahu typ úlohy, heuristiku, tvar algoritmu a vlastnosti konvergence algoritmu.

Základní pozorování:

- Potřebujeme najít bod lokálního minima.
- Podstatná je struktura úlohy.
- Výhodou je konvexnost a polyedrická množina přípustných řešení.

6.1 Základní idee algoritmů pro řešení NLP

Uvažujeme, že hledáme optimální hodnotu a optimální řešení úlohy $\min\{f(x) : x \in \mathbf{M}\}$. Ke zjednodušení úlohy a urychlení výpočtu využíváme několik základních idejí:

1. Nahradit účelovou funkci f lineární funkcí a množinu $\mathbf{M}$ nahradit konvexní polyedrickou množinou. Pak můžeme použít simplexovou metodu nebo některý jiný algoritmus pro řešení lineárního programování.
2. Upravit gradientní metodu na úlohu s omezeními danými množinou $\mathbf{M}$.
3. Převést úlohu na volný extrém.

Budeme si všímat typu úlohy, heuristiky, nástinu algoritmu a jeho vlastností. Rozebereme si stručně základní typy algoritmů.

6.2 Převod na úlohu lineárního programování

Typ 1: Uvažujme úlohu

$$\max\left\{\min_{i\in I}\{a_i^T x + b_i\} \;:\; x \in \mathbf{M}\right\},$$

kde $\mathbf{M}$ je konvexní polyedrická množina.

V případě $\operatorname{card}(I) = 1$ jde o úlohu lineárního programování. Zavedením pomocné proměnné zapíšeme úlohu jako úlohu lineárního programování i v případě $\operatorname{card}(I) > 1$.

Tento přepis úlohy vypadá následovně

$$\max\left\{z \;:\; z \le a_i^T x + b_i \;\forall i \in I,\; x \in \mathbf{M},\; z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Typ 2: Uvažujme úlohu

$$\min\left\{\min_{i\in I}\{a_i^T x + b_i\} \;:\; x \in \mathbf{M}\right\},$$

kde $\mathbf{M}$ je konvexní polyedrická množina.

V případě $\operatorname{card}(I) = 1$ jde o úlohu lineárního programování. V případě $\operatorname{card}(I) > 1$ již není situace tak jednoduchá, jako v předchozím případě. Zavedením pomocné proměnné zapíšeme úlohu jako

$$\max\left\{z \;:\; z \le a_i^T x + b_i \;\forall i \in I,\; \forall x \in \mathbf{M},\; z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Úloha má pouze jednu proměnnou, lineární účelovou funkci a lineární podmínky. Podmínek je $\operatorname{card}(I) \times \operatorname{card}(M)$. Úloha je proto úlohou lineárního programování pouze v případě $\mathbf{M}$ je konečná množina. Typicky je však podmínek nespočetně.

Úlohu však lze přepsat také jako

$$\min_{i\in I}\left\{\min\left\{a_i^T x + b_i \;:\; x \in \mathbf{M}\right\}\right\}.$$

Tedy vyřešíme konečně úloh lineárního programování a zjistíme, která má nejmenší optimální hodnotu.

Typ 3: Uvažujme úlohu

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \;:\; Ax \le b,\; x \in \mathbb{R}^n\right\}, \tag{6.1}$$

kde f_j pro $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou spojité funkce a množina přípustných řešení

$$\mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; Ax \le b,\; x \in \mathbb{R}^n\} \ne \emptyset$$

je konvexní polyedr.

Připomeňme, že funkce f, splňující $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$, se nazývá separovatelná. Zabýváme se tedy úlohou jejíž účelová funkce je separovatelná a jejíž množina přípustných řešení je neprázdným konvexním polyedrem.

Množina přípustných řešení $\mathbf{M}$ je konvexním polyedrem. Proto existují čísla $L_j < U_j$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ taková, že $\mathbf{M} \subset \bigtimes_{j=1}^{n} [L_j, U_j]$ je podmnožina n-rozměrného intervalu. Dále budeme nahrazovat každou funkci f_j funkcí po částech lineární s K_j uzlovými body. Interval $[L_j, U_j]$ rozdělíme body $L_j = a_{0j} < a_{1,j} < \ldots < a_{K_j,j} = U_j$ a definujeme spojitou funkci $\tilde{f}_j$ tak, že $\tilde{f}_j(a_{k,j}) = f_j(a_{k,j})$ pro $k = 0, \ldots, K_j$ a v každém intervalu $[a_{k-1,j}, a_{k,j}]$ je lineární.

Označíme-li směrnice

$$s_{k,j} = \frac{f_j(a_{k,j}) - f_j(a_{k-1,j})}{a_{k,j} - a_{k-1,j}}, \; k = 1, \ldots, K_j,$$

pak pro $x \in (a_{k-1,j}, a_{k,j})$ můžeme psát

$$\tilde{f}_j(x) = f_j(a_{k-1,j}) + s_{k,j}(x - a_{k-1,j}) = f_j(L_j) + \sum_{l=1}^{K_j} s_{l,j} y_{l,j}(x),$$

kde $y_{k,j}(x)$ definujeme jako délku průniku intervalů $[0, x] \cap [a_{k-1,j}, a_{k,j}]$.

Pro každé $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, K_j$ si zavedeme proměnné $y_{k,j}$ a úlohu (6.1) převedeme na tvar

$$\min \sum_{j=1}^{n} \left[f_j(L_j) + \sum_{k=1}^{K_j} s_{k,j} y_{k,j} \right] \tag{6.2}$$

za podmínek

$$x_j = L_j + \sum_{k=1}^{K_j} y_{k,j} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.4}$$

$$y_{k,j} \leq a_{k,j} - a_{k-1,j} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, K_j, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.5}$$

$$y_{k,j} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, K_j, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.6}$$

$$y_{k,j} < a_{k,j} - a_{k-1,j} \implies y_{k+1,j} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, K_j - 1, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Pro konvexní funkce f_j hledání minima není problém. Směrnice jsou v tomto případě monotónní $s_{1,j} \leq s_{2,j} \leq \ldots \leq s_{K_j,j}$. Pak stačí řešit úlohu lineárního programování (6.2)-(6.6), neboť každé její optimální řešení je optimálním řešením úlohy (6.2)-(6.7). Pokud však funkce nejsou konvexní, pak se podmínky (6.7) snadno nezbavíme.

Poznámky k této metodě.

- Přibližné optimální řešení $\tilde{x}$ dostaneme řešením aproximující úlohy. Jak daleko je ale skutečné řešení?
- Když budou funkce f_j pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ spojité s konečnou variací, pak zjemňováním dělení se bude aproximace zlepšovat.
- V původní úloze jsme měli n proměnných, při zjemnění pro každé x_j přibude K_j, celkově dostáváme $n + \sum_j K_j$ proměnných. Zvětšuje se rozsah úlohy. Za zpřesnění platíme numerickou náročností.

- Rovnoměrné zjemňování dělení intervalů nebývá nejlepším postupem. Daleko lepším bývá dělení intervalů kolem bodu minima.
- Také v omezení mohou být separovatelné funkce $g_k(x) = \sum_j g_{k,j}(x_j)$. Pak každé $g_{k,j}$ aproximujeme po částech lineární funkcí a dostáváme opět dobré výsledky.

6.3 Metoda sečné (opěrné) nadroviny

Metoda je vhodná pro úlohu NLP:

$$\text{minimalizovat } f(x) \text{ na množině } \mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \le 0,\ k = 1, \ldots, m\}, \tag{6.8}$$

kde f, g_j, $\forall k$ jsou konvexní, mají spojité parciální derivace a $\mathbf{M}$ je kompakt.

Množina přípustných řešení $\mathbf{M}$ je kompakt, proto můžeme najít M_0 konvexní polyedr - například $M_0 = \bigtimes_{j=1}^{n} [L_j, U_j]$, který obsahuje $\mathbf{M}$. Začneme minimalizací funkce f na množině M_0. Dostaneme optimální řešení x_0.

- Jestliže $x_0 \in \mathbf{M}$, pak máme řešení zadané úlohy NLP.
- Jestliže $x_0 \notin \mathbf{M}$, pak ho podle věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny můžeme od množiny $\mathbf{M}$ oddělit nadrovinou. Dostaneme tak konvexní polyedr $M_1 \subset M_0$ takový, že $M_1 \neq M_0$, $M_1 \supset M$, $x^0 \notin M_1$.
  Minimalizujeme funkci f na množině M_1 a pokračujeme rekurentně dále.

Formulujme algoritmus založený na této myšlence.

Metoda sečné nadroviny

KROK 1: Urči M_0 konvexní polyedr takový, že $M_0 \supset \mathbf{M}$.

KROK 2: Pro $t \in \mathbb{N}_0$ je již určen konvexní polyedr M_t takový, že $M_t \supset \mathbf{M}$.

Najdi x_t globální minimum úlohy minimalizovat f na M_t.

- Pokud $x_t \in \mathbf{M}$, pak x_t a je optimálním řešením úlohy 6.8.
- Pokud $x_t \notin \mathbf{M}$, jdi na **KROK 3**.

KROK 3: Protože $x_t \notin \mathbf{M}$, musí být alespoň jedna podmínka porušena.

Vezmi index k_t nějaké podmínky, která je porušena; např. té, kde je porušení největší.

Polož

$$M_{t+1} = M_t \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ :\ g_{k_t}(x_t) + \left(\nabla g_{k_t}(x_t)\right)^\top (x - x_t) \le 0 \right\}, \tag{6.9}$$

$t := t + 1$ a vrať se na **KROK 2**.

$\diamondsuit$

Musíme ještě ověřit, že v kroku 3 zachováme podmínku $\mathbf{M} \subset M_{t+1}$ a $x_t \notin M_{t+1}$.

- x_t nepatří do M_{t+1}, protože nesplňuje přidanou podmínku v (6.9), jelikož $g_{k_t}(x_t) > 0$.

- Nechť $x \in \mathbf{M}$, pak $g_{k_t}(x) \le 0$. Funkce g_{k_t} je konvexní a tak platí
$$g_{k_t}(x_t) + (\nabla g_{k_t}(x_t))^\top (x - x_t) \le g_{k_t}(x) \le 0.$$
Tedy $x \in \mathbf{M}_{t+1}$.

Algoritmus nám dává posloupnost do sebe zařazených množin
$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset \mathbf{M}.$$
Na každé z nich počítám $\min_{x\in\mathbf{M}_t} f$. Vzniklá posloupnost minimálních hodnot je neklesající při $t \to \infty$. Jde o metodu vnějšího bodu. Pokud algoritmus neskončí v některém opakování krokem 2, tak dostaneme $x_t \notin \mathbf{M}$ a posloupnost
$$f(x_t) = \min_{x\in\mathbf{M}_t} f(x) \nearrow \min_{x\in\mathbf{M}} f(x).$$
Lze dokázat, že každá konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{x_t\}$ má limitu v množině optimálních řešení $\operatorname{argmin}_{x\in\mathbf{M}} f(x)$.

V praxi však nemůžeme udělat nekonečně mnoho kroků tohoto algoritmu. Pokud nenalezneme optimální řešení, musíme výpočet ukončit nějakým jiným pravidlem; např. omezením počtu opakování, časem výpočtu, atd.

Když bude f lineární, pak v kroku 2 řešíme úlohu lineárního programování.

Předpoklad lineární f neznamená žádnou ztrátu na obecnosti neboť obecnou úlohu (6.8) lze jednoduše převést na úlohu s lineární účelovou funkcí. Stačí přidat novou proměnnou x_{n+1} a řešit úlohu
$$\min\left\{x_{n+1} \,:\, \overline{g}_j(x_1,\ldots,x_{n+1}) \le 0,\ k = 1,\ldots,m+1\right\},$$
kde
$$\overline{g}_j(x_1,\ldots,x_{n+1}) = g_j(x_1,\ldots,x_n),\ k = 1,\ldots,m, \quad \overline{g}_{m+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = f(x_1,\ldots,x_n) - x_{n+1}.$$

Příklad 6.1: Maximalizujte $x_1 + x_2$ na množině
$$\mathbf{M} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\right\}.$$
Nejdříve úlohu přepíšeme na tvar, pro který byla metoda vyložena
$$\min\left\{-x_1 - x_2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\right\}.$$
Označme $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Tato funkce má gradient $\nabla g(x) = \binom{2x_1}{2x_2}$.

0. Jako startovní množinu vezmeme čtverec $M_0 = [0,1] \times [0,1]$.
1. Minimalizujeme $-x_1 - x_2$ na M_0. Minimální hodnota účelové funkce je -2 a minimum nastává v bodě $x_0 = [1,1]$, který nepatří do $\mathbf{M}$.
2. Podmínky nezápornosti splněny jsou, ale podmínka $g(x_0) \le 0$ není splněná, neboť $g(x_0) = 1 > 0$. Řez bude
$$g(x_0) + (2\ 2)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \le 0$$
tedy
$$1 + 2x_1 - 2 + 2x_2 - 2 \le 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \le \frac{3}{2}.$$
Tudíž
$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + x_2 \le \frac{3}{2},\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\right\}.$$

3. Minimalizujeme $-x_1 - x_2$ na M_1. Jak je vidět na obrázku, na úsečce (řezu) si můžeme vybrat libovolný bod. Všechny budou body minima $-x_1 - x_2$ na dané množině M_1. Vybereme například bod $x^1 = \left(1, \frac{1}{2}\right)^\top$. Minimální hodnota účelové funkce je $f(x^1) = -\frac{3}{2}$.

   Tento bod opět splňuje podmínky nezápornosti, ale nesplňuje omezení, protože $g(x^1) = 1 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} > 0$.

   Gradient je $\nabla g(x^1) = \binom{2}{1}$, proto přidáme omezení
$$g(x^1) + (2\ 1)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leq 0,$$
   což dává podmínku
$$2x_1 + x_2 \leq \frac{9}{4}.$$
   Tudíž
$$M_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2},\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{9}{4},\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}.$$

4. Minimalizujeme $-x_1 - x_2$ na M_2. Minimální hodnota účelové funkce se nezměnila. Zůstává $-\frac{3}{2}$ a nabývá se ji v každém bodě úsečky s koncovými body $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)^\top$ a $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)^\top$.

   Zvolme bod $x^2 = \left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)^\top$. Bod není přípustným řešením naší úlohy. Odřízneme jej řezem
$$g(x^2) + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{3}{4} \\ x_2 - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \leq 0,$$
   což dává podmínku
$$x_1 + x_2 \leq \frac{17}{12}.$$
   Tudíž
$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2},\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{9}{4},\ x_1 + x_2 \leq \frac{17}{12},\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_1 + x_2 \leq \frac{17}{12},\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{9}{4},\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

5. Bod minima opět není jednoznačně určen. Vybereme $x^3 = [\frac{17}{24},\ \frac{17}{24}]$, které opět není přípustným řešením naší úlohy, a pokračujeme dalším krokem algoritmu.

Takto zkonstruovaná posloupnost bude konvergovat k bodu $x^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top$, který je optimálním řešením dané úlohy.

$\triangle$

6.4 Zobecnění gradientních metod na úlohy s omezeními

Gradientní metody jsou určeny pro úlohu
$$\min \{ f(x) \ :\ x \in \mathbf{M} \},$$

kde funkce f má spojité parciální derivace a $\mathbf{M} = \mathrm{clo}\,(\mathrm{int}\,(\mathbf{M}))$.

Uvědomme si, že pro obecný směr $s \in \mathbb{R}^n$ platí následující. Definujme funkci

$$\varphi(\lambda) = f(x + \lambda s) \quad \text{pro } \lambda \geq 0. \tag{6.10}$$

Funkce je diferencovatelná a platí

$$\varphi'(\lambda) = s^\top \nabla f(x + \lambda s). \tag{6.11}$$

Speciálně

$$\varphi'(0) = s^\top \nabla f(x). \tag{6.12}$$

Tedy funkce φ klesá v bodě 0, pokud $s^\top \nabla f(x) < 0$. To znamená, že funkce f klesá ve směru s.

Definice 6.2 *Řekneme, že $s \in \mathbb{R}^n$ je přípustný směr z bodu $\tilde{x} \in \mathbf{M}$ pro úlohu $\min\{f(x) : x \in \mathbf{M}\}$, když platí:*

1. $s^\top \nabla f(x) < 0$.
2. $\exists\, \varepsilon > 0 : x + \lambda s \in \mathbf{M}$ *pro* $0 \leq \lambda \leq \varepsilon$.

První podmínka zaručuje pokles funkce f při pohybu z bodu x ve směru s a druhá, že při malém pohybu v tomto směru zůstáváme v množině $\mathbf{M}$. Pro nalezení minima použijeme následující algoritmus.

Gradientní metoda

KROK 1: Zvol $x_0 \in \mathbf{M}$.

KROK 2: Urči přípustný směr s_t z bodu x_t.

- Jestli přípustný směr neexistuje, pak jdi na **KROK 4**.
- Jestli existuje, jdi na **KROK 3**

KROK 3: Generuj nové řešení $x^{t+1} = x_t + \lambda_t s_t$, kde λ_t (např.) řeší jednorozměrnou úlohu

$$\min\{f(x_t + \lambda s_t) : x_t + \lambda s_t \in \mathbf{M},\ \lambda \geq 0\}. \tag{6.13}$$

Polož $t := t + 1$ a jdi na **KROK 2**.

KROK 4: Je-li funkce konvexní a $\mathbf{M}$ konvexní, pak je x_t optimální řešení.

$\diamondsuit$

Jedná se o metodu vnitřního bodu.

Pro úlohu konvexního programování platí, že když se algoritmus zastaví, pak nalezl optimální řešení.

Tvrzení 6.3 *Nechť je f konvexní, $\mathbf{M}$ je konvexní množina a v bodě $x^* \in \mathbf{M}$ neexistuje žádný přípustný směr. Pak $x^* \in \ \mathrm{argmin}_{x \in \mathbf{M}} f(x)$.*

Důkaz:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*),\ \forall\, x \in \mathbf{M}.$$

Směr $x - x^*$ splňuje vlastnost 2) z definice 6.2, neboť $x^* + \lambda(x - x^*) \in \mathbf{M}$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$ (tady jsme použili konvexnost $\mathbf{M}$). Podle předpokladu však nemůže být směrem přípustným. Proto nutně $\nabla f(x^*)^T s \geq 0$ a platí

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T s \geq f(x^*),\ \forall\, x \in \mathbf{M}.$$

Tudíž bod x^* je optimálním řešením úlohy.

Q.E.D.

Pro nekonvexní funkce existují postupy jak hledat optimální řešení v případě, že neexistuje přípustný směr. Doporučuje se například opakovaná volba startovacího bodu x_0.

Úlohu (6.13) řešíme numericky, například půlením intervalu $(0 \leq \lambda \leq \varepsilon)$. Problémem může být volba směru s_t, kde je příliš mnoho vůle. V případě špatné volby vůbec nemusí algoritmus konvergovat k optimálnímu řešení (zigg-zagging), viz následující příklad:

Příklad 6.4: Řešíme úlohu minimalizovat $f(x) = x_1 + x_2$ za podmínek $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Zvolíme $x^1 = \binom{2}{0},\ f(x^1) = 2$. Směr volíme následovně

$$s^k = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{k} \\ 1 + \frac{1}{k+1} \end{pmatrix} \qquad \text{pro lichá } k, \tag{6.14}$$

$$s^k = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{k+1} \\ -1 - \frac{1}{k} \end{pmatrix} \qquad \text{pro sudá } k. \tag{6.15}$$

Zvolené směry splňují první vlastnost přípustného směru, neboť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$(1,1)\, s^k = 1 + \frac{1}{k+1} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} < 0.$$

Musíme pouze zajistit, abychom neopustili množinu $\mathbf{M}$.

V prvním kroku pro $k = 1$ máme

$$s^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ x^2 = x^1 + \lambda s^1 = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ \frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix}.$$

Pak $x^2 \in \mathbf{M}$, když $2 \geq 2\lambda$ a $\frac{3}{2}\lambda \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq 1$. Násobek λ zvolíme tak, aby účelová funkce byla co nejmenší. Řešíme tedy úlohu:

$$\min_{\lambda \in [0,1]} 2 - 2\lambda + \frac{3}{2}\lambda = \min_{\lambda \in [0,1]} 2 - \frac{1}{2}\lambda.$$

Řešením úlohy je evidentně $\lambda = 1$ a tudíž

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ f(x^2) = \frac{3}{2}.$$

Pokračujeme nyní pro $k = 2$, kde jsme zvolili

$$s^2 = \begin{pmatrix} +\frac{4}{3} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},\ x^3 = x^2 + \lambda s^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\lambda \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix} \text{ a } \lambda \in [0,1].$$

Řešíme optimalizační úlohu

$$\min_{\lambda \in [0,1]} \frac{4}{3}\lambda + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda.$$

Minima se opět nabývá pro $\lambda = 1$ a

$$x^3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix},\ f(x^3) = \frac{4}{3}.$$

Takto postupujeme pro $k = 3, 4, 5, \ldots\ldots$

Zkonstruovaná posloupnost neklesne pod spojnici bodů $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$ a $f(x^k) \longrightarrow -1$. Minima se však nabývá v bodě $\binom{0}{0}$, kde $f\binom{0}{0} = 0$.

$\triangle$

Pro rozumnou volbu přípustných směrů je potřebné modifikovat 2.krok algoritmu. Existuje celá řada možností, viz např [1]. Uveďme zde pouze názvy některých metod metoda projekce gradientu, metoda redukovaného gradientu, optimální volba směru. Pro ilustraci uveďme příklad, v kterém je využita optimální volba směru.

Příklad 6.5: Nechť $\mathbf{M}$ je omezená konvexní polyedrická množina. V bodě x_t řešíme úlohu LP, v které chceme docílit $\min_{y\in\mathbf{M}} y^\top \nabla f(x_t)$ a bod ve kterém nastane minimum pomocné úlohy označíme y_t.

- Pokud $(y_t)^T \nabla f(x_t) = (x_t)^T \nabla f(x_t)$, pak je x_t optimální řešení a neexistuje $s = y_t - x_t \neq 0$ a $s^\top \nabla f(x_t) < 0$, tedy žádný přípustný směr z bodu x_t.
- Pokud $(y_t)^T \nabla f(x_t) < (x_t)^T \nabla f(x_t)$ pak dostáváme přípustný směr $s_t = y_t - x_t$, protože $(y_t - x_t)^T \nabla f(x_t) < 0$ a $x_t + \lambda(y_t - x_t) \in M$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$.

$\triangle$

6.5 Převedení úloh NLP na úlohy hledání volného minima

Budeme se zabývat penalizačními a bariérovými metodami.

6.5.1 Penalizační metoda

Je určena pro úlohy typu

$$\min \{f(x) \,:\, x \in \mathbf{M}\},$$

kde $\mathbf{M} \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{M}$ je uzavřená a $\mathcal{X}$ je otevřená množina. Dále máme k dispozici vhodnou penalizační funkci $\Psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{+,0}$, která splňuje $\Psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbf{M}$ a roste se vzdáleností od množiny $\mathbf{M}$.

Příklad 6.6: Pro úlohu

$$\min \{f(x) \,:\, g_j(x) \leq 0,\ k = 1, \ldots, m,\ h_k(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

můžeme penalizační funkci volit například jako

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(g_j(x)) + \sum_{k=1}^{p} \rho_k(h_k(x)),$$

kde

- ϕ_j je spojitá funkce, $\phi_j(y) = 0$ pro $y \leq 0$ a rostoucí na $(0, +\infty)$; např. $t_+ = \max\{t, 0\}$, $t_+^2 = (\max\{t, 0\})^2$.
- ρ_k je spojitá funkce, $\rho_j(0) = 0$, klesající na $(-\infty, 0)$ a rostoucí na $(0, +\infty)$; např. $|t|$, t^2, atd.

$\triangle$

Metoda je založena na aproximaci zadané úlohy úlohou $\min \{f(x) + \mu\Psi(x) \,:\, x \in \mathcal{X}\}$.

Penalizační metoda

KROK 1: $\varepsilon > 0, x^1$ libovolně, $\mu_1 > 0,\ \beta > 1,\ k := 1$.

KROK 2: **Hlavní krok:** Nalezneme x^{k+1} optimální řešení úlohy

$$\min \{ f(x) + \mu_j \Psi(x) \,:\, x \in \mathcal{X} \} .$$

KROK 3: Pokud

$$\mu_j \Psi(x^{k+1}) < \varepsilon$$

pak algoritmus končí. Jinak $\mu_{k+1} = \beta\mu_j$ a s $k := k+1$ jdeme na **KROK 2**.

♢

Jedná se o metodu vnějšího bodu.

6.5.2 Barierová metoda

Je určena pro úlohy typu

$$\min \{ f(x) \,:\, x \in \mathbf{M} \} ,$$

kde $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina a $\operatorname{clo}(\operatorname{int}(\mathbf{M})) = \mathbf{M}$. Dále máme k dispozici vhodnou barierovou funkci $\Phi : \mathbf{M} \to \mathbb{R}^*_{+,0}$, která splňuje $\Phi(x) = +\infty$ pro každé $x \in \partial(\mathbf{M})$ a roste tím, čím blíže je k hranici množiny $\mathbf{M}$.

Jedná se o metodu vnitřního bodu. Metoda vyžaduje, aby množina přípustných řešení úlohy měla neprázdný vnitřek. Hodí se proto pouze pro nerovnosti $g_j(x) \le 0,\ \forall\ k$ a není vhodná pro úlohy s rovnicemi. Množina přípustných řešení úlohy s rovností má totiž prázdný vnitřek.

Příklad 6.7: Pro úlohu

$$\min \{ f(x) \,:\, g_j(x) \le 0,\ k = 1, \ldots, m,\ x \in \mathbb{R}^n \}$$

můžeme barierovou funkci volit například jako $\Phi(x) = \sum_{j=1}^m \phi_j(g_j(x))$, kde funkce ϕ_j je spojitá, $\phi_j(y)$ roste do nekonečna na $(-\infty, 0)$ a na $[0, +\infty)$ není definovaná (nebo je $+\infty$). Hodí se funkce konvexní; například $-\frac{1}{y}$ nebo $-\log(-y)$ uvažované pouze na $(-\infty, 0)$.

△

Metoda je založena na aproximaci zadané úlohy úlohou $\min \{ f(x) + \nu\Phi(x) \,:\, x \in \operatorname{int}(\mathbf{M}) \}$.

Velikostí ν řídíme vliv bariérové funkce. Jestli $\Phi \nearrow \infty$, pak přes ν tlumíme její růst, aby jejich součin zůstal u nuly. Funkce Φ vytváří bariéru, přes kterou se nedostaneme - jde o metodu vnitřního bodu.

Barierová metoda

KROK 1: $\varepsilon > 0,\ x^1 \in \operatorname{int}(\mathbf{M})$ (jinak by algoritmus nefungoval), $0 < \beta < 1,\ k := 1$.

KROK 2: **Hlavní krok:** Nalezneme x^{k+1} optimální řešení úlohy

$$\min \{ f(x) + \nu_j \Phi(x) \,:\, x \in \operatorname{int}(\mathbf{M}) \} .$$

KROK 3: Pokud platí tolerance

$$\nu_j \Phi(x^{k+1}) < \varepsilon$$

pak algoritmus končí. Jinak klademe $\nu_{k+1} = \beta\nu_j,\ k := k+1$; a jdeme na **KROK 2**.

$\diamondsuit$

Uveďme si jednoduchý příklad.

Příklad 6.8: Minimalizujte x za podmínek $x \geq 0$.
Jako bariérové funkce použijeme funkce $\frac{1}{x}$, $-\log x$ a jako penalizační funkci použijeme $\frac{1}{r}(x^-)^2$.
Pak dostáváme úlohy:

- $\min\left\{x + r\frac{1}{x} \,:\, x > 0\right\}$, kde $r > 0$ je parametr.
  Diferencováním vyřešíme $1 - \frac{r}{x^2} = 0$ a tedy $x = \sqrt{r}$.
- $\min\{x - r\log x \,:\, x > 0\}$, kde $r > 0$ je parametr.
  Diferencováním vyřešíme $1 - \frac{r}{x} = 0$ a tedy $x = r$.
- $\min\left\{x + \frac{1}{r}(x^-)^2 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$, kde $r > 0$ je parametr.
  Minimum nastává v záporném oboru. Hledáme tedy $x < 0$ tak, aby $1 - \frac{2}{r}x = 0$.
  Tudíž řešení je $x = -\frac{r}{2}$.

Vidíme, že ve všech třech případech se přibližujeme k optimálnímu řešení původní úlohy, pokud snižujeme hodnotu parametru r.

$\triangle$

Poznamenejme na závěr kapitoly, že penalizační a bariérovou metodu můžeme kombinovat. U některých podmínek můžeme jejich nesplnění penalizovat a zbylé nahradíme bariérou.

Kapitola 7

Postoptimalizace v LP

V této kapitole si povšimneme „ ex post“ změn v zadaní úloh LP. Jde o to, že po vyřešení zadané úlohy dojde ke změně zadání. Například se změní politika zadavatele, změní se jeho preference, do provozu je uvedena nová výrobní linka, začne se využívat nový výrobní postup, odběratelé změní své požadavky, změní se ceny, atd. Pokud jsme danou úlohu LP vyřešili Simplexovou metodou, pak při některých typech změn úlohy, můžeme nalezené řešení využít k nalezení optimálního řešení pozměněné úlohy. Vhodně pozměníme simplexovou tabulku a optimální řešení původní úlohy použijeme jako počáteční řešení k nastartování simplexového algoritmu nebo duálního simplexového algoritmu pro pozměněnou simplexovou tabulku.

Uvažujme, že jsme Simplexovou metodou vyřešili úlohu LP

$$\min\left\{c^\top x \,:\, x \in \mathbf{M}\right\}, \text{ kde } \mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\ x \geq 0\}. \tag{7.1}$$

Máme tedy nalezenu optimální bázi $L \subset J = \{1, 2, \dots, n\}$, která určuje $\widehat{x} = x\,(L)$ optimální řešení úlohy (7.1). Označme si $I = \{1, 2, \dots, m\}$ a $B = A_{I\times L}$, $D = A_{I\times(J\setminus L)}$, $\gamma = c_L$, $d = c_{J\setminus L}$. Víme, že je splněno

i) přípustnost $\widehat{x}_L = B^{-1}b \geq 0$;

ii) optimalita $\gamma^\top B^{-1}D - d^\top \leq \mathbf{0}^\top$ (nebo ekvivalentně $\gamma^\top B^{-1}A - c^\top \leq \mathbf{0}^\top$).

Připomeňme, že nenulové složky optimálního řešení jsou $B^{-1}b$ a optimální hodnota je $\gamma^\top B^{-1}b$.

Mohlo nastat několik změn:

Změna vektoru pravých stran $b \to b + \triangle b$.

Podmínka ii) i po změně platí, nezávisí totiž na b.
Otázkou však je, zda báze L je stále optimální?
Podmínka i) po změně platí, když

$$B^{-1}(b - \triangle b) \geq \mathbf{0}. \tag{7.2}$$

1. Nechť je (7.2) splněno.
   V tomto případě je L stále optimální báze, nenulové složky optimálního řešení jsou $B^{-1}(b - \triangle b)$ a optimální hodnota je $\gamma^\top B^{-1}(b - \triangle b)$.

2. Nechť (7.2) neplatí.
   V tomto případě je báze L duálně přípustná, ale není primárně přípustná.
   Přepočteme sloupec simplexové tabulky odpovídající nenulovým složkám bazického řešení, tj. zaměníme $B^{-1}b \to B^{-1}(b - \triangle b)$.
   Optimální řešení změněné úlohy nalezneme pomocí duální Simplexové metody.

Změna koeficientů účelové funkce $c \to c + \triangle c$.

Pak je báze L stále primárně přípustná, neboť i) na c nezávisí.
Musíme prověřit její duální přípustnost, tj. podmínku ii), což je

$$(\gamma + \triangle\gamma)^\top B^{-1}D - (d + \triangle d)^\top \leq \mathbf{0}^\top. \tag{7.3}$$

1. Jestliže (7.3) platí, tak je báze L optimální, nenulové složky příslušného optimálního řešení jsou $B^{-1}b$ a optimální hodnota je $(\gamma + \triangle\gamma)^\top B^{-1}b$.

2. Pokud (7.3) neplatí, pak je báze L pouze primárně přípustná.
   Opravíme záhlaví tabulky, tj. $c \to c + \triangle c$, a kriteriální řádek, tj.

$$\gamma^\top B^{-1}D - d^\top \to (\gamma + \triangle\gamma)^\top B^{-1}D - (d + \triangle d)^\top .$$

   Optimální řešení změněné úlohy nalezneme pomocí Simplexové metody.

V úloze přibude nová proměnná; například se začne vyrábět další výrobek.

Dojde k rozšíření technologické matice a vektoru koeficientů účelové funkce

$$A \to (A \,|\, a^{n+1}), \quad c \to \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pak L je stále primárně přípustná, neboť podmínka i) není touto změnou ovlivněna.
Podmínka optimality ii) má tvar

$$\gamma^\top B^{-1}a^{n+1} - c_{n+1} \leq 0. \tag{7.4}$$

1. Pokud platí (7.4), pak původní řešení zůstává optimální také pro rozšířenou úlohu, zůstává stejná optimální hodnota a nový výrobek nevyrábíme, protože se to nevyplatí.

2. Jestliže (7.4) neplatí, pak rozšíříme simplexovou tabulku

			$c^\top$	c_{n+1}
γ	L	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	$B^{-1}a^{n+1}$
		$\gamma^\top B^{-1}b$	$\gamma^\top B^{-1}A$	$\gamma^\top B^{-1}a^{n+1} - c_{n+1}$

   a pokračujeme v simplexové metodě.

   Vidíme, že v prvém kroku zařadíme novou proměnnou do báze. Nemusí však dojít k zastavení algoritmu. Nová proměnná však v bázi zůstane až do zastavení algoritmu.

Přibude nové omezení.

$\alpha^\top x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \le \beta$.
Přidáme skluzovou proměnnou

$$\alpha^\top x + x_{n+1} = \beta,\ x_{n+1} \ge 0,\ c_{n+1} = 0.$$

Rozšířená úloha má omezení s indexy z množiny $\widetilde{J} = \{1, 2, \ldots, m+1\}$ a proměnné s indexy z množiny $\widetilde{J} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. $n+1$ proměnných a její parametry jsou

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \alpha^\top & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix},\ \widetilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do báze přidáme novou proměnnou $\widetilde{L} = L \cup \{n+1\}$. Potom $\widetilde{L}$ je báze pro rozšířenou úlohu, protože matice

$$\widetilde{B} = \widetilde{A}_{\widetilde{L} \times \widetilde{I}} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \alpha_L^\top & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je regulární.}$$

Pro výpočet kritérií i) a ii) potřebujeme inverzní matici, která je

$$\widetilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme testovat přípustnost, tedy jestli platí

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{b} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -\alpha_L^\top B^{-1} b + \beta \end{pmatrix} \ge \mathbf{0}.$$

Horní část podmínky, tj. $B^{-1}b \ge 0$, je splněna, protože jde o optimální řešení původní úlohy. Zůstává tedy pouze podmínka

$$\alpha_L^\top B^{-1} b \le \beta. \tag{7.5}$$

tedy, že optimální řešení splňuje podmínku přidaného omezení.

Podmínka optimality je zde

$$\begin{aligned} & (\gamma^\top, 0)\ \widetilde{B}^{-1}\widetilde{A} - \widetilde{c}^\top = (\gamma^\top, 0) \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \alpha^\top & 1 \end{pmatrix} - \widetilde{c}^\top \\ = \ & (\gamma^\top, 0) \begin{pmatrix} B^{-1}A & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} A + \alpha^\top & 1 \end{pmatrix} - (c^\top, 0) \\ = \ & (\gamma^\top B^{-1} A - c^\top, 0) \le \mathbf{0}, \end{aligned}$$

neboť L je optimální báze původní úlohy.

Zjistili jsme, že $\widetilde{L}$ je duálně přípustná báze pro rozšířenou úlohu.

1. Když je splněna podmínka (7.5), pak $\widetilde{L}$ je optimální báze změněné úlohy, $\left(\begin{smallmatrix} B^{-1}b \\ -\alpha_L^\top B^{-1} b + \beta \end{smallmatrix}\right)$ jsou nenulové složky příslušného optimálního bazického řešení a optimální hodnota je $\gamma^\top B^{-1} b$.

2. Když podmínka (7.5) není splněna, pak $\widetilde{L}$ je pouze duálně přípustná báze pro změněnou úlohu. Rozšíříme tedy simplexovou tabulku

			$c^\top$	0
L	γ	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	$\mathbf{0}$
$n+1$	0	$-\alpha_L^\top B^{-1}b+\beta$	$-\alpha_L^\top B^{-1}A+\alpha^\top$	1
		$\gamma^\top B^{-1}b$	$\gamma^\top B^{-1}A-c^\top$	0

a optimální řešení změněné úlohy nalezneme pomocí duálního simplexového algoritmu.

Pokud přibude omezení $\alpha^\top x \geq \beta$, pak je vynásobíme -1. Získáme tak nerovnost $-\alpha^\top x \leq -\beta$, na kterou již můžeme použít uvedený postup.

Pokud přibude omezení $\alpha^\top x = \beta$, pak je přepíšeme jako $\alpha^\top x \leq \beta$, $\alpha^\top x \geq \beta$. Na obě nerovnosti použijeme uvedený postup.

Kapitola 8

Apendix

8.1 Množiny v $\mathbb{R}^n$

Základními množinami v $\mathbb{R}^n$ jsou otevřená a uzavřená okolí (koule)

$$\mathcal{U}_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, \|y - x\| < \delta\}\,,\ \mathcal{V}_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, \|y - x\| \le \delta\}$$

definovaná pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ a každé $\delta > 0$.

Připomeňme topologické pojmy, které používáme v konečně dimenzionálním Euklidově prostoru.

Definice 8.1 *Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme následující tři pojmy.*

1. *Vnitřek množiny A je největší otevřená množina, která je obsažena v množině A. Používáme označení* $\operatorname{int}(A)$.
2. *Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina, která obsahuje množinu A. Používáme označení* $\operatorname{clo}(A)$.
3. *Hranice množiny A je množina všech bodů z uzávěru množiny A, která nejsou body vnitřku množiny A. Používáme označení $\partial(A)$.*

Mezi těmito pojmy platí následující vztahy.

Lemma 8.2 *Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí:*

- $\partial(A) = \operatorname{clo}(A) \setminus \operatorname{int}(A)$
- $\partial(A) = \operatorname{clo}(A) \cap \operatorname{clo}(\mathbb{R}^n \setminus A)$
- $\operatorname{clo}(A) \supset \operatorname{int}(A)$
- $\operatorname{clo}(A) = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$
- $\operatorname{int}(A) = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{clo}(\mathbb{R}^n \setminus A)$

Pojmy lze ekvivalentně definovat. První charakterizace je pomocí otevřených okolí

Lemma 8.3 *Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí:*

- $x \in \operatorname{int}(A) \iff \exists\, \delta > 0$ *takové, že* $\mathcal{U}_\delta(x) \subset A$.
- $x \in \operatorname{clo}(A) \iff \forall\, \delta > 0$ *je* $\mathcal{U}_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$.
- $x \in \partial(A) \iff \forall\, \delta > 0$ *je* $\mathcal{U}_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$ *a také* $\mathcal{U}_\delta(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

Pomocí konvergentních posloupností získáme druhou charakterizaci.

Lemma 8.4 *Pro množinu* $A \subset \mathbb{R}^n$ *a* $x \in \mathbb{R}^n$ *platí:*

- $x \in \operatorname{int}(A) \iff \forall$ *posloupnost* $x_n \in \mathbb{R}^n,\ x_n \to x\ \exists\, n_0$ *takové, že* $\forall\, n \geq n_0$ *je* $x_n \in A$.
- $x \in \operatorname{clo}(A) \iff \exists$ *posloupnost* $x_n \in A$ *taková, že* $x_n \to x$.
- $x \in \partial(A) \iff \exists$ *posloupnosti* $x_n \in A,\ y_n \in \mathbb{R}^n \setminus A$ *takové, že* $x_n \to x,\ y_n \to x$.

8.2 Funkce na $\mathbb{R}^n$

Věta 8.5: *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}$ *jsou otevřené množiny. Když* $f : U \to \mathbb{R}$ *je spojitě diferencovatelná na* U *a* $g : V \to U$ *je diferencovatelná na* V*, pak složená funkce* $F(t) = f(g(t))$ *je diferencovatelná na* V *a pro každé* $t \in V$ *platí* $F'(t) = (\nabla_t g(t))^\top \nabla_x F(g(t))$.

8.3 Vektorové prostory

Připomeňme si důležité pojmy z lineární algebry.

Definice 8.6 *Množina opatřená operacemi* $P = (P, +, 0, \neg, \mathbb{R}, \cdot)$ *se nazývá (lineární) vektorový prostor (nad* $\mathbb{R}$*), jestliže splňuje:*

1. $P = (P, +, 0)$ *je Abelova grupa, tj. platí*

   i) Komutativita $x + y = y + x$.

   ii) Asociativita $x + (y + z) = (y + x) + z$.

   iii) Nulový prvek $x + 0 = 0 + x = x$.

   iv) Pro každé $x \in P$ *existuje inverzní prvek* $\neg x \in P$ *takový, že* $x + (\neg x) = (\neg x) + x = 0$. *Zápis se zjednodušuje tak, že píšeme* $-x := +(\neg x)$.

2. *Pro každé* $x \in P$ *a* $r \in \mathbb{R}$ *je dán prvek* $r \cdot x$. *Pro násobení reálným číslem platí:*

   i) Roznásobování I $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$.

   ii) Roznásobování II $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$.

   iii) Násobení jednotkou $1 \cdot x = x$.

Definice 8.7 *Když* P *je vektorový prostor, pak řekneme, že* $Q \subset P$ *je*

i) podprostor v P*, jestliže je vektorový prostor vzhledem k operacím prostoru* P.

ii) lineál v P*, jestliže je podprostorem* P *posunutým do nějakého bodu* P*. Též se používá termín afinní podprostor prostoru* P.

iii) *nadrovina* *v* P*, jestliže je lineálem v* P *kodimenze* 1*, tj. prostor všech vektorů k ní kolmých má dimenzi* 1*.*

Připomeňme si definice používaných obalů množiny.

Definice 8.8 *Nechť* P *je vektorový prostor, pak pro* $S \subset P$ *definujeme:*

$$\begin{aligned}
\textit{lineární obal} \quad \ldots\ldots \quad & \mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s) s \,:\, \lambda(s) \in \mathbb{R}, s \in I, I \subset S \text{ konečná} \right\}, \\
\textit{afinní obal} \quad \ldots\ldots \quad & \mathsf{Aff}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s) s \,:\, \lambda(s) \in \mathbb{R}, s \in I,\ \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1,\ I \subset S \text{ konečná} \right\}, \\
\textit{nezáporný lineární obal} \quad \ldots\ldots \quad & \mathrm{pos}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s) s \,:\, \lambda(s) \geq 0, s \in I, I \subset S \text{ konečná} \right\}, \\
\textit{konvexní lineární obal} \quad \ldots\ldots \quad & \mathrm{conv}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s) s \,:\, \lambda(s) \geq 0, s \in I,\ \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1,\ I \subset S \text{ konečná} \right\}.
\end{aligned}$$

Připomeňme, že $\mathcal{L}(S)$ je nejmenší podprostor obsahující S, $\mathsf{Aff}(S)$ je nejmenší lineál (afinní podprostor) obsahující S, $\mathrm{pos}(S)$ je nejmenší kužel (s vrcholem v počátku) obsahující S, $\mathrm{conv}(S)$ je nejmenší konvexní množina obsahující S.

Literatura

[1] Bazara, M.S.; Sherali, H.D.; Shetty, C.M.: *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* 2nd edition, Wiley, New York, 1993.

[2] Dupačová, J.: *Lineární programování.* SPNP, Praha, 1982.

[3] Plesník, J.; Dupačová, J.; Vlach, M.: Lineárne programovanie, Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Habala, P.; Hájek, P.; Zizler, V.: *Introduction to Banach Spaces I-II.* MatfyzPress, Praha, 1996.

[5] Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti.* Skripta MFF UK, Praha, 1998.

[6] Rockafellar, T.: *Convex Analysis.*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[7] Rockafellar, T.; Wets, R. J.-B.: *Variational Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[8] Wolfe, P.: The simplex method for quadratic programming. Econometrica **27,3**(1959), 382-398.

Index