# Konvexita v konečné dimenzi
# Petr Lachout

- pracovní text k přednášce „ NEKN012 Optimalizace I"

16.října 2011

# Obsah

Ve skriptech je použito následující označení:

$\mathbb{R}$ ........ reálná čísla
$\mathbb{R}^*$ ........ rozšířená reálná čísla
$\mathbb{N}$ ........ přirozená čísla
$\mathbb{Z}$ ........ celá čísla
$\operatorname{clo}(A)$ ........ uzávěr množiny $A$
$\operatorname{int}(A)$ ........ vnitřek množiny $A$
$\operatorname{rint}(A)$ ........ relativní vnitřek množiny $A$
$\partial(A)$ ........ hranice množiny $A$
$\mathsf{e}_{i:n},\ i = 1, 2, \dots, n$ ........ jednotkové vektory v $\mathbb{R}^n$

# Kapitola 0

# Úvod

Tento text shrnuje základní znalosti a informace o konvexních množinách a konvexních funkcích v konečné dimenzi, které jsou nutné pro výklad základů teorii optimalizace. Většina z uvedených vlastností a vztahů je v platnosti v Hilbertových prostorech či dokonce v Banachových prostorech. Naším cílem je však podat základy nutné pro vysvětlení teorie lineárního programování (Farkasova věta, dualita úloh lineárního programování, simplexová metoda, dopravní problém) a nelineárního programování (Lagrangeova funkce, Lagrangeovy multiplikátory, globální podmínky optimality, lokální podmínky optimality, podmínky regularity). Vše chceme vyložit v konečné dimenzi a tak i konvexní množiny a konvexní funkce budeme studovat pouze v konečné dimenzi. Pro obecnější pojetí musí zvídavý čtenář použít jinou vhodnou literaturu.

V textu očekáváme základní znalosti z lineární algebry, lineárních vektorových prostorů a zejména z teorie reálných matic.

# Kapitola 1

# Konvexní množiny

## 1.1 Různé obaly obecné množiny

Nejdříve si pro obecnou množinu připomeňme definice používaných obalů množiny.

**Definice 1.1** *Pro neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ definujeme:*

$$\underline{\textit{lineární obal}} \quad \ldots \quad \mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s \ : \ \lambda(s) \in \mathbb{R} \ \forall\, s \in I\,, \ I \subset S \ \textit{konečná} \right\},$$

$$\underline{\textit{afinní obal}} \quad \ldots \quad \mathsf{Aff}\,(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s \ : \ \lambda(s) \in \mathbb{R} \ \forall\, s \in I\,, \ \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1\,, \ I \subset S \ \textit{konečná} \right\},$$

$$\underline{\textit{nezáporný obal}} \quad \ldots \quad \mathrm{pos}\,(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s \ : \ \lambda(s) \geq 0 \ \forall\, s \in I\,, \ I \subset S \ \textit{konečná} \right\},$$

$$\underline{\textit{konvexní obal}} \quad \ldots \quad \mathrm{conv}\,(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s \ : \ \lambda(s) \geq 0 \ \forall\, s \in I\,, \ \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1\,, \ I \subset S \ \textit{konečná} \right\}.$$

*Pro prázdnou množinu definici rozšiřujeme následovně*

$$\mathcal{L}(\emptyset) = \mathrm{pos}\,(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}\ ,\ \mathsf{Aff}\,(\emptyset) = \mathrm{conv}\,(\emptyset) = \emptyset.$$

Připomeňme, že $\mathcal{L}(S)$ je nejmenší podprostor obsahující $S$ a $\mathsf{Aff}\,(S)$ je nejmenší lineál (afinní podprostor) obsahující $S$. Význam obalů $\mathrm{pos}\,(S)$ a $\mathrm{conv}\,(S)$ si vysvětlíme za chvíli.

## 1.2 Definice konvexní množiny a její základní vlastnosti

Začněme definicí pojmu konvexní množiny.

**Definice 1.2** *Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je <u>konvexní</u>, jestliže pro každé dva body $x, y \in A$ a $0 < \lambda < 1$ platí $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.*

Poznamenejme, že také prázdná množina vyhovuje definici a je tedy konvexní množinou.

Definice konvexnosti množiny je ekvivalentní s tím, že libovolná konvexní kombinace konečně bodů z množiny $A$ leží opět v $A$.

**Lemma 1.3** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ je bod $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in A$.*

**Důkaz:** Důkaz provedeme indukcí.

1. Pro $k = 1$ je tvrzení triviální.
2. Pro $k = 2$ tvrzení platí, jedná se přímo o definici konvexnosti množiny.
3. Nechť je tvrzení již dokázáno pro $k \in \mathbb{N}$.
   Vezměme $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in A$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1} \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$.
   (a) Pokud $\lambda_{k+1} = 1$, pak $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = a_{k+1} \in A$.
   (b) Pokud $\lambda_{k+1} < 1$, pak můžeme psát
   $$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1}.$$
   Uvědomme si, že $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$.
   Proto použitím indukčního předpokladu dostaneme, že $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} a_i \in A$.
   Studovaný bod je tedy konvexní lineární kombinací dvou bodů z množiny $A$. Proto přímo z definice konvexnosti množiny plyne, že
   $$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1} \in A.$$
   Ukázali jsme tedy, že tvrzení platí i pro $k + 1$.

Platnost tvrzení je tímto dokázána.

Q.E.D.

Povšimněme si základních vlastností konvexních množin. Nejdříve si povšimněme, že aritmetický součet konvexních množin je opět konvexní množina.

**Lemma 1.4** *Když $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom*

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha a + \beta b \,:\, a \in A,\ b \in B\}$$

*je také konvexní množina. Speciálně, $\alpha A$, $A + B$, $A - B$ (Pozor! Odlišovat od množinového rozdílu $A \setminus B$!) jsou konvexní množiny.*

**Důkaz:** Ověříme definici konvexní množiny. Vezměme $x, y \in \alpha A + \beta B$ a $0 < \lambda < 1$.
Potom $x = \alpha a_1 + \beta b_1$, $y = \alpha a_2 + \beta b_2$ pro vhodná $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. Proto platí

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda(\alpha a_1 + \beta b_1) + (1-\lambda)(\alpha a_2 + \beta b_2) \\ &= \alpha(\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2) + \beta(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2) \in \alpha A + \beta B, \end{aligned}$$

neboť $\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \in A$, $\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2 \in B$, protože $A$ i $B$ jsou konvexní množiny.

Q.E.D.

Uvědomme si ještě, které množinové operace zachovávají konvexitu.

**Lemma 1.5** *Nechť $I \neq \emptyset$ je indexová množina a pro každé $i \in I$ je dána konvexní množina $A_i \subset \mathbb{R}^n$. Potom také $\bigcap_{i \in I} A_i$ je konvexní množinou.*

**Důkaz:** Nechť $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ a $0 < \lambda < 1$.
Pak ovšem pro každé $i \in I$ je $x, y \in A_i$.
Z konvexnosti množin $A_i$ plyne, že $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A_i$ pro každé $i \in I$.
Závěrem $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Q.E.D.

**Lemma 1.6** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, potom také* $\mathrm{clo}\,(A)$ *je konvexní množina.*

**Důkaz:** Vezměme $x, y \in \mathrm{clo}\,(A)$ a $0 < \lambda < 1$.
Pak existují posloupnosti $x_n, y_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y$.
Množina $A$ je konvexní, a tak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lambda x_n + (1 - \lambda) y_n \in A$.
Limitním přechodem dostáváme

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda x_n + (1 - \lambda) y_n = \lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathrm{clo}\,(A)\,.$$

Ověřili jsme, že $\mathrm{clo}\,(A)$ je konvexní množina.

Q.E.D.

**Lemma 1.7** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, potom také* $\mathrm{int}\,(A)$ *je konvexní množina.*

**Důkaz:** Vezměme $x, y \in \mathrm{int}\,(A)$ a $0 < \lambda < 1$.
Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\varepsilon\,(x) \subset A$ i $\mathcal{U}_\varepsilon\,(y) \subset A$.
Množina $A$ je konvexní, proto platí

$$\lambda \mathcal{U}_\varepsilon\,(x) + (1 - \lambda) \mathcal{U}_\varepsilon\,(y) = \mathcal{U}_\varepsilon\,(\lambda x + (1 - \lambda) y) \subset A.$$

Tudíž jsme zjistili, že $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathrm{int}\,(A)$.

Tím jsme ověřili, že $\mathrm{int}\,(A)$ je konvexní množina.

Q.E.D.

Uvědomme si, že sjednocení množin, množinový rozdíl, doplněk množin nebo hranice množiny konvexitu nezachovávají. Čtenář jistě sám nalezne řadu jednoduchých příkladů.

Ještě si uveďme definici dimenze a relativního vnitřku konvexní množiny.

**Definice 1.8** *Dimenzí neprázdné konvexní množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme dimenzi nejmenšího lineálu (afinního podprostoru), který obsahuje množinu $A$, tj. dimenzi* $\mathsf{Aff}\,(A)$.

*Pro prázdnou množinu dimenzi nezavádíme.*

**Definice 1.9** *Relativním vnitřkem neprázdné konvexní množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme vnitřek této množiny vzhledem k nejmenšímu lineálu (afinnímu podprostoru), který obsahuje množinu $A$, tj. vzhledem k $\mathsf{Aff}\,(A)$. Relativní vnitřek označujeme $\mathrm{rint}\,(A)$.*

*Pro prázdnou množinu klademe $\mathrm{rint}\,(\emptyset) = \emptyset$.*

Uvedené definice jsou vhodné pouze pro konvexní množiny. Pro obecné množiny jsou pojmy dimenze a relativního vnitřku také uvažovány. Je však třeba definice formulovat opatrněji, podstatně složitějším způsobem.

**Lemma 1.10** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, potom také $\mathrm{rint}\,(A)$ je konvexní množina.*

**Důkaz:** Relativní vnitřek množiny $A$ je jejím vnitřkem vzhledem k lineálu $\mathsf{Aff}\,(A)$. Je tedy konvexní množinou podle lemmatu 1.7.

Q.E.D.

**Lemma 1.11** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina, potom také $\mathrm{rint}\,(A)$ je neprázdná konvexní množina.*

**Důkaz:** Podle lemmatu 1.10 již víme, že $\mathrm{rint}\,(A)$ je konvexní množina. Musíme ukázat pouze jeho neprázdnost. Rozlišíme tři případy.

1) Množina je jednobodová, označme $A = \{a\}$. Pak také $\mathrm{rint}\,(A) = \{a\}$.

2) Množina $A$ má dimenzi $n$, tj. $\mathsf{Aff}\,(A) = \mathbb{R}^n$.

   Pak existují body $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ tak, že $\mathsf{Aff}\,(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \mathbb{R}^n$.

   Množina $A$ je konvexní a tak $\mathrm{conv}\,(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subset A$. Potom však

$$\mathrm{int}\,(A) \supset \mathrm{int}\,(\mathrm{conv}\,(a_0, a_1, \ldots, a_n)) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \,:\, \lambda_i > 0 \;\forall\, i = 0, 1, \ldots, n\,,\; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\} \neq \emptyset.$$

3) Množina $A$ obsahuje alespoň dva body, ale její dimenze $m$ je menší nežli $n$.

   Lineál $\mathsf{Aff}\,(A)$ je posunutým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$, který je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^m$.

   Proto můžeme problém uvažovat pouze v rámci (v souřadném systému) lineálu $\mathsf{Aff}\,(A)$.

   Změnou souřadnic dostáváme $A \subset \mathbb{R}^m$ a $\mathsf{Aff}\,(A) = \mathbb{R}^m$. Tuto situaci jsme již vyřešili v předchozím případě.

Q.E.D.

**Lemma 1.12** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní, $a \in \mathrm{int}\,(A)$ a $x \in \partial\,(A)$, potom existuje $\rho > 0$ takové, že*

$$\{\lambda a + (1-\lambda)x + \lambda u \,:\, 0 < \lambda \leq 1, \,,\; u \in \mathcal{U}_\rho\,(\mathbf{0})\} \subset \mathrm{int}\,(A)\,.$$

**Důkaz:** Předpokládáme $a \in \mathrm{int}\,(A)$ a $x \in \partial\,(A)$, potom existuje $\rho > 0$ a posloupnost $v_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{U}_\rho\,(a) \subset \mathrm{int}\,(A)$ a $v_i \to x$ když $i \to +\infty$.
Pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ máme

$$\{\lambda a + (1-\lambda)v_i + \lambda u \,:\, 0 < \lambda \leq 1, \,,\; u \in \mathcal{U}_\rho\,(\mathbf{0})\} \subset \mathrm{int}\,(A)\,.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(A) &\supset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left\{ \lambda a + (1-\lambda)v_i + \lambda u \;:\; 0 < \lambda \leq 1, \;,\; u \in \mathcal{U}_\rho(\mathbf{0}) \right\} \\ &\supset \left\{ \lambda a + (1-\lambda)x + \lambda u \;:\; 0 < \lambda \leq 1, \;,\; u \in \mathcal{U}_\rho(\mathbf{0}) \right\}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Speciálním důsledkem tohoto lemmatu je následující pozorování.

**Lemma 1.13** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, $a \in \operatorname{int}(A)$ a $s \in \mathbb{R}^n$, potom existují pouze dvě možnosti. Buď*

$$\{a + ts \;:\; t \geq 0\} \subset \operatorname{int}(A)$$

*nebo existuje $t_0 > 0$ takové, že*

$$\{a + ts \;:\; 0 \leq t < t_0\} \subset \operatorname{int}(A)\,, \;\; a + t_0 s \in \partial(A)\,, \;\; \{a + ts \;:\; t \geq t_0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{clo}(A)\,.$$

**Důkaz:** Nechť existuje $t_0 > 0$ takové, že $a + t_0 s \in \partial(A)$. Pak podle lemmatu 1.12

$$\{a + ts \;:\; 0 \leq t < t_0\} \subset \operatorname{int}(A)\,.$$

Kdyby existovalo $t_1 > t_0$ takové, že $a + t_1 s \in A$, pak podle lemmatu 1.12

$$\{a + ts \;:\; 0 \leq t < t_1\} \subset \operatorname{int}(A)\,.$$

Speciálně by muselo být $a + t_0 s \in \operatorname{int}(A)$, což by byl spor.

Lemma je tím dokázáno.

Q.E.D.

**Lemma 1.14** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, potom platí*

$$\operatorname{clo}(\operatorname{rint}(A)) = \operatorname{clo}(A)\,.$$

**Důkaz:** Rozlišme čtyři případy.

1. Když $A = \emptyset$, pak

$$\operatorname{clo}(\operatorname{rint}(A)) = \operatorname{clo}(A) = \emptyset.$$

2. Když je množina jednobodová, řekněme $A = \{a\}$, pak

$$\operatorname{clo}(\operatorname{rint}(A)) = \operatorname{clo}(A) = \{a\}\,.$$

3. Nechť $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ a $A$ obsahuje alespoň dva body.
   To znamená, že $\operatorname{rint}(A) = \operatorname{int}(A)$.
   Vezměme tedy $\tilde{a} \in \operatorname{int}(A)$. K němu existuje $\delta > 0$ tak, že $\mathcal{U}_\delta(\tilde{a}) \subset A$.
   Pro každou množinu je $\operatorname{clo}(\operatorname{int}(A)) \subset \operatorname{clo}(A)$, stačí ukázat opačnou inkluzi.
   Vezměme $x \in \operatorname{clo}(A)$.
   Podle lemmatu 1.13, pro každé $0 < \lambda < 1$ je $\lambda\tilde{a} + (1-\lambda)x \in \operatorname{int}(A)$.
   To ale znamená, že $x \in \operatorname{clo}(\operatorname{int}(A))$.
   Jinak řečeno, ukázali jsme požadovanou inkluzi $\operatorname{clo}(\operatorname{int}(A)) \supset \operatorname{clo}(A)$.

4. Nechť $\operatorname{int}(A) = \emptyset$ a $A$ obsahuje alespoň dva body.
   V tomto případě stačí uvažovat úlohu vzhledem k lineál nejmenší dimenze, který obsahuje $A$.
   Vzhledem k tomuto lineálu již platí $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$.
   Tím jsme úlohu převedli na předchozí případ.

Prošli jsme všechny možné případy a tak je tvrzení dokázáno.

Q.E.D.

**Lemma 1.15** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, potom platí*

$$\operatorname{rint}(\operatorname{clo}(A)) = \operatorname{rint}(A).$$

**Důkaz:** Rozlišme čtyři případy.

1. Když $A = \emptyset$, pak
$$\operatorname{rint}(\operatorname{clo}(A)) = \operatorname{rint}(A) = \emptyset.$$
2. Když je množina jednobodová, řekněme $A = \{a\}$, pak
$$\operatorname{rint}(\operatorname{clo}(A)) = \operatorname{rint}(A) = \{a\}.$$
3. Nechť $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ a $A$ obsahuje alespoň dva body.
   To znamená, že $\operatorname{rint}(A) = \operatorname{int}(A)$.
   Zřejmě platí $\operatorname{int}(\operatorname{clo}(A)) \supset \operatorname{int}(A)$. Musíme ukázat pouze opačnou inkluzi.
   Vezměme $y \in \operatorname{int}(\operatorname{clo}(A))$ a $a \in \operatorname{int}(A)$.
   Pak podle lemmatu 1.13 je buď
$$\{a + t(y - a) \,:\, t \geq 0\} \subset \operatorname{int}(A)$$
   nebo existuje $t_0 > 1$ takové, že
$$\{a + t(y - a) \,:\, 0 \leq t < t_0\} \subset \operatorname{int}(A).$$
   Oba případy však znamenají, že $y \in \operatorname{int}(A)$.
   Jinak řečeno, ukázali jsme požadovanou inkluzi $\operatorname{int}(\operatorname{clo}(A)) \subset \operatorname{int}(A)$.
4. Nechť $\operatorname{int}(A) = \emptyset$ a $A$ obsahuje alespoň dva body.
   V tomto případě stačí uvažovat úlohu vzhledem k lineálu nejmenší dimenze, který obsahuje $A$.
   Vzhledem k tomuto lineálu již platí $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$.
   Tím jsme úlohu převedli na předchozí případ.

Prošli jsme všechny možné případy a tak je tvrzení dokázáno.

Q.E.D.

Nyní si ukážeme význam pojmu konvexní obal množiny.

**Věta 1.16**: *Když $S \subset \mathbb{R}^n$, pak* conv $(S)$ *je roven nejmenší konvexní množině obsahující* $S$.

**Důkaz**:

1) Zřejmě $S \subset \operatorname{conv}(S)$. Pro $s \in S$ stačí v definici položit $I = \{s\}$.

2) Ukážeme, že množina conv $(S)$ je konvexní.

   Vezměme dva body $x, y \in \operatorname{conv}(S)$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s^i$, $y = \sum_{j=1}^{r} \varphi_j z^j$ a $\alpha \in [0,1]$, pak

$$\alpha x + (1-\alpha) y = \sum_{i=1}^{k} \alpha \lambda_i s^i + \sum_{j=1}^{r} (1-\alpha) \varphi_j z^j = \sum_{m=1}^{k+r} \rho_m v^m \in \operatorname{conv}(S),$$

$$\text{neboť } v^1, \ldots, v^{k+r} \in S, \; \rho_1 \geq 0, \ldots, \rho_{k+r} \geq 0, \; \sum_{i=1}^{k+r} \rho_i = 1,$$

   kde $\rho_1 := \alpha\lambda_1, \ldots, \rho_k := \alpha\lambda_k$, $\rho_{k+1} := (1-\alpha)\varphi_1, \ldots, \rho_{k+r} := (1-\alpha)\varphi_r$,
   $v^1 := \hat{s}_1, \ldots,\; v^k := \hat{s}_k,\; v^{k+1} := z^1,\; \ldots,\; v^{k+r} := z^r$.

3) Když $B \supset S$ je konvexní, pak $B \supset \operatorname{conv}(S) \supset S$ podle lemmatu 1.3.

Tudíž conv $(S)$ je roven nejmenší konvexní množině obsahující $S$.

Q.E.D.

Jelikož se pohybujeme v konečné dimenzi $n$, stačí ke konstrukci konvexního obalu uvažovat pouze konvexní lineární kombinace $n+1$ bodů z dané množiny.

**Věta 1.17** (Caratheodory): *Pro $S \subset \mathbb{R}^n$ platí*

$$\operatorname{conv}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s) s \;:\; \lambda(s) \geq 0 \;\forall\, s \in I\,,\; \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1\,,\; I \subset S\,,\; \operatorname{card}(I) \leq n+1 \right\}.$$

**Důkaz**: Nechť $x \in \operatorname{conv}(S)$.
Pak podle definice 1.1 existují $N \in \mathbb{N}$, $s^1, s^2, \ldots, s^N \in S$ a $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\ldots$, $\lambda_N \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s^i$.

1. Když $N \leq n+1$, pak je již bod $x$ vyjádřen patřičným způsobem.

2. Nechť $N > n+1$.

   Pak existují $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N \in \mathbb{R}$ takové, že alespoň jedno z nich je nenulové a

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \nu_i s^i = 0.$$

   Potom však nutně existuje $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tak, že $\nu_j < 0$.

   Tudíž pro vektory $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)^\top$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N)^\top$ platí

$$0 \leq \Delta = \max\{t \geq 0 \;:\; \lambda + t\nu \geq 0\} < +\infty.$$

Označme $\mu = \lambda + \Delta\nu$. Pak

$$\mu \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} \mu_i s^i = x.$$

Alespoň jeden z těchto koeficientů je však nulový a tak jsme bod $x$ vyjádřili pomocí $N-1$ bodů z $S$. Takto postupně redukujeme body z $S$, z nichž je nakombinován bod $x$, dokud není těchto bodů nejvýše $n+1$.

Tím je tvrzení věty dokázáno.

Q.E.D.

## 1.3 Konvexní polyedrické množiny

**Definice 1.18** *Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá*

*i) konvexní polyedrická množina, existuje-li konečný počet uzavřených poloprostorů $H_1, H_2, \ldots, H_k$ tak, že $A = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$.*

*ii) konvexní polyedr, existuje-li konečná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A = \mathrm{conv}\,(S)$.*

Připomeňme, že každý uzavřený poloprostor je tvaru $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \gamma^\top x \geq b\}$, kde $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$, $b \in \mathbb{R}$.

**Lemma 1.19** *Konvexní polyedrická množina je uzavřená množina.*

**Důkaz:** Konvexní polyedrická množina je průnikem uzavřených množin a tak je nutně také uzavřená.

Q.E.D.

**Lemma 1.20** *Konvexní polyedr je kompaktní množina.*

**Důkaz:** Uvažujme konvexní polyedr $P = \mathrm{conv}\,(S)$, kde $S \subset \mathbb{R}^n$ je konečná množina.
Nechť $x_j \in P$, $j \in \mathbb{N}$.
Podle věty 1.16 víme, že tyto body lze reprezentovat jako konvexní lineární kombinace $x_j = \sum_{s\in S} \lambda_j(s)s$.
Množina $S$ je konečná, pro každé $s \in S$, $j \in \mathbb{N}$ jsou $0 \leq \lambda_j(s) \leq 1$ a $\sum_{s\in S} \lambda_j(s) = 1$.
Dokážeme proto vybrat podposloupnost $j_m$, $m \in \mathbb{N}$ takovou, že

$$\text{pro každé } s \in S \text{ máme při } m \to +\infty \text{ konvergenci } \lambda_{j_m}(s) \to \lambda(s) \in [0,1].$$

Potom platí

$$\sum_{s\in S} \lambda(s) = \sum_{s\in S} \lim_{m\to+\infty} \lambda_{j_m}(s) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{s\in S} \lambda_{j_m}(s) = 1,$$
$$\lim_{m\to+\infty} x_{j_m} = \sum_{s\in S} \lim_{m\to+\infty} \lambda_{j_m}(s)s = \sum_{s\in S} \lambda(s)s \in P.$$

Tím jsme ukázali, že konvexní polyedr je kompaktní množina.

Q.E.D.

## 1.4 Konvexní kužely

**Definice 1.21** *Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá*

*i) kužel (s vrcholem v počátku), jestliže $\mathbf{0} \in A$ a pro každý bod $s \in A$ a $\alpha > 0$ je $\alpha s \in A$.*

*ii) kužel s vrcholem v bodě p, kde $p \in \mathbb{R}^n$, když $A - p$ je kužel.*

*iii) konvexní kužel, když je kužel a zároveň také konvexní množina.*

*iv) konvexní polyedrický kužel, existuje-li konečná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A = \operatorname{pos}(S)$.*

Poznamenejme, že nejmenším kuželem a zároveň také nejmenším konvexním kuželem i nejmenším konvexním polyedrickým kuželem je kužel $\operatorname{pos}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

**Lemma 1.22** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní kužel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}_0$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ a $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\dots$, $\lambda_k \geq 0$ je bod $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in A$.*

**Důkaz:**

1. Když $k = 0$, pak $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^0 \lambda_i a_i = \mathbf{0} \in A$.
2. Když $\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, pak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ a $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \mathbf{0} \in A$.
3. Když $\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, pak $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\alpha} = 1$ a $\frac{\lambda_1}{\alpha} \geq 0, \frac{\lambda_2}{\alpha} \geq 0, \dots, \frac{\lambda_k}{\alpha} \geq 0$.
   Pak z konvexnosti $A$ plyne, že $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\alpha} a_i \in A$,
   Množina $A$ je také kužel, a tak $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \alpha \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\alpha} a_i \in A$.

Q.E.D.

Význam nezáporného lineárního obalu množiny je v tom, že generuje nejmenší konvexní kužel, který danou množinu obsahuje.

**Věta 1.23**: *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$, pak $\operatorname{pos}(S)$ je nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu $S$.*

**Důkaz:**

1) Množina $\operatorname{pos}(S)$ je evidentně kužel.

2) Množina $\operatorname{pos}(S)$ je konvexní, neboť vezmeme-li dva body $x, y \in \operatorname{pos}(S)$, $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i s^i$, $y = \sum_{j=1}^r \varphi_j z^j$ a $\alpha \in [0, 1]$, pak

$$\alpha x + (1-\alpha) y = \sum_{i=1}^k \alpha \lambda_i s^i + \sum_{j=1}^r (1-\alpha)\varphi_j z^j = \sum_{m=1}^{k+r} \rho_m v^m \in \operatorname{pos}(S)\,,$$

$$\text{neboť } v^1, \dots, v^{k+r} \in S\,,\ \rho_1 \geq 0, \dots, \rho_{k+r} \geq 0,$$

kde

$$\rho_1 := \alpha\lambda_1, \dots, \rho_k := \alpha\lambda_k,\ \rho_{k+1} := (1-\alpha)\varphi_1, \dots, \rho_{k+r} := (1-\alpha)\varphi_r,$$
$$v^1 := s_1, \dots, v^k := s_k\,,\ v^{k+1} := z^1, \dots, v^{k+r} := z^r.$$

3) Když $B \supset S$ je konvexní kužel, pak $B \supset \operatorname{pos}(S) \supset S$ podle lemmatu 1.22.

Tudíž $\mathrm{pos}\,(S)$ je konvexním kuželem generovaným množinou $S$.

Q.E.D.

Proto často o $\mathrm{pos}\,(S)$ hovoříme, jako o konvexním kuželi generovaným množinou $S$.

Konvexní polyedrický kužel je uzavřená množina. Důkaz však již není tak přímočarý jako u lemmatu 1.19. Uzavřenost umíme ukázat přímo pro konvexní polyedrický kužel, který neobsahuje žádnou přímku. To je ale právě ten případ, který budeme dále potřebovat.

**Lemma 1.24** *Konvexní polyedrický kužel, který neobsahuje žádnou přímku, je uzavřená množina.*

**Důkaz:** Uvažujme konvexní polyedrický kužel $P = \mathrm{pos}\,(S)$, kde $S \subset \mathbb{R}^n$ je konečná množina. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathbf{0} \notin S$.

Nechť $x_j \in P$, $j \in \mathbb{N}$ takové, že $x_j \to x \in \mathbb{R}^n$ když $j \to +\infty$.
Podle věty 1.23 víme, že tyto body lze reprezentovat jako nezáporné lineární kombinace $x_j = \sum_{s\in S} \lambda_j(s)s$.
Označme $M_j = \max_{s\in S} \lambda_j(s)$ a $M = \sup_{j\in\mathbb{N}} M_j$.

- Ukážeme sporem, že $M < +\infty$.

  Předpokládejme, že $M = +\infty$ a pro $s \in S$, $j \in \mathbb{N}$ označme $\varphi_j(s) = \frac{\lambda_j(s)}{M_j}$.

  Množina $S$ je konečná a pro každé $s \in S$, $j \in \mathbb{N}$ jsou $0 \le \varphi_j(s) \le 1$ a vždy existuje bod tak, že je pro něj váha rovna jedné.

  Dokážeme proto vybrat podposloupnost $j_m$, $m \in \mathbb{N}$ takovou, že

  pro každé $s \in S$ máme při $m \to +\infty$ konvergenci $\varphi_{j_m}(s) \to \varphi(s) \in [0, 1]$
  a existuje bod $\hat{s} \in S$ takový, že $\varphi(\hat{s}) = 1$.

  Potom platí

  $$\mathbf{0} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{M_{j_m}} x_{j_m} = \sum_{s\in S} \lim_{m\to+\infty} \varphi_{j_m}(s)s = \sum_{s\in S} \varphi(s)s.$$

  Potom také

  $$\sum_{s\in S\setminus\{\hat{s}\}} \varphi(s)s = -\hat{s}.$$

  To ale znamená, že $\hat{s}, -\hat{s} \in P$. Potom $P$ obsahuje celou přímku určenou směrem $\hat{s}$, neboť $P$ je kužel. To je ale spor s našimi předpoklady.

Přesvědčili jsme se, že $M < +\infty$. Množina $S$ je konečná a pro každé $s \in S$, $j \in \mathbb{N}$ jsou $0 \le \lambda_j(s) \le M$. Dokážeme proto vybrat podposloupnost $j_m$, $m \in \mathbb{N}$ takovou, že

pro každé $s \in S$ máme při $m \to +\infty$ konvergenci $\lambda_{j_m}(s) \to \lambda(s) \in [0, M]$.

Potom platí

$$\lim_{m\to+\infty} x_{j_m} = \sum_{s\in S} \lim_{m\to+\infty} \lambda_{j_m}(s)s = \sum_{s\in S} \lambda(s)s \in P.$$

Tím jsme ukázali, že konvexní polyedrický kužel, který neobsahuje žádnou přímku, je uzavřená množina.

Q.E.D.

**Lemma 1.25** *Konvexní polyedrický kužel je uzavřená množina.*

**Důkaz:** Konvexní polyedrický kužel je direktním součtem podprostoru a konvexního polyedrického kužele, který neobsahuje žádnou přímku. Podle lemmatu 1.24 jde proto o uzavřenou množinu.

Q.E.D.

## 1.5 Směry konvexní množiny

Pro teorii optimalizace jsou důležité směry v nichž je konvexní množina neomezená.

**Definice 1.26** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina, pak řekneme, že $s \in \mathbb{R}^n$ je směrem $A$, jestliže existuje bod $a \in A$ takový, že pro každé $\alpha > 0$ je $a + \alpha s \in A$.*

*Množinu všech směrů množiny $A$ budeme označovat $\mathsf{direct}(A)$.*

*Pro prázdnou množinu klademe $\mathsf{direct}(\emptyset) = \{0\}$.*

Směry množiny mají následující vlastnosti.

**Lemma 1.27** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$, pak $\mathsf{direct}(A)$ je kužel.*

**Důkaz:** Když $s$ je směr $A$, pak každý jeho kladný násobek je opět směrem $A$.

Q.E.D.

**Lemma 1.28** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, pak $\mathsf{direct}(A)$ je konvexní kužel.*

**Důkaz:** Víme již, že $\mathsf{direct}(A)$ je kužel, stačí tedy ukázat jeho konvexitu.
Nechť $s, v \in \mathsf{direct}(A)$ a $0 < \lambda < 1$.
Pak existují $x, y \in A$ takové, že pro každé $\alpha > 0$ je $x + \alpha s, y + \alpha v \in A$.
Z konvexity $A$ však plyne, že pro každé $\alpha > 0$ je také $\lambda x + (1-\lambda)y + \alpha(\lambda s + (1-\lambda)v) \in A$.
Tudíž $\lambda s + (1-\lambda)v \in \mathsf{direct}(A)$.
Tím jsme ověřili, že $\mathsf{direct}(A)$ je konvexní kužel.

Q.E.D.

**Lemma 1.29** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, $s \in \mathsf{direct}(A)$ a $a \in \mathrm{rint}(A)$, pak pro každé $\alpha > 0$ je $a + \alpha s \in A$.*

**Důkaz:** Vektor $s$ je směr množiny $A$ a tak existuje $x \in A$ takové, že pro každé $\alpha > 0$ je $x + \alpha s \in A$.
Bod $a$ je bodem relativního vnitřku množiny $A$. Existují proto $z \in A$ a $0 < \lambda < 1$ takové, že $a = \lambda z + (1-\lambda)x$.
Jelikož $s$ je směr množiny $A$ a $A$ je konvexní množina, proto pro každé $\alpha > 0$ je

$$a + \alpha s = \lambda z + (1-\lambda)\left(x + \frac{\alpha}{1-\lambda}s\right) \in A.$$

Q.E.D.

**Lemma 1.30** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina, $s \in \mathsf{direct}(A)$ a $a \in A$, pak pro každé $\alpha > 0$ je $a + \alpha s \in A$.*

**Důkaz:** Vektor $s$ je směr množiny $A$ a tak existuje $x \in A$ takové, že pro každé $\alpha > 0$ je $x + \alpha s \in A$.
Z konvexnosti množiny $A$ je pro každé $0 < \lambda < 1$ a pro každé $\alpha > 0$

$$\lambda a + (1-\lambda)x + \alpha s = \lambda a + (1-\lambda)\left(x + \frac{\alpha}{1-\lambda}s\right) \in A.$$

Limitním přechodem při $\lambda \to 1-$ s využitím uzavřenosti množiny $A$ dostáváme kýženou vlastnost.

Q.E.D.

**Lemma 1.31** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina, pak $\mathsf{direct}(A)$ je uzavřený konvexní kužel.*

**Důkaz:** Pro prázdnou množinu tvrzení platí.
Uvažujme neprázdnou množinu. Podle lemmatu 1.28 již víme, že $\mathsf{direct}(A)$ je konvexní kužel. Je třeba ukázat jeho uzavřenost.
Nechť $s_k \in \mathsf{direct}(A)$, $k \in \mathbb{N}$ a $\lim_{k\to+\infty} s_k = s \in \mathbb{R}^n$.
Vezměme (libovolný) bod $a \in A$. Podle lemmatu 1.30 pro každé $t > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ platí $a + ts_k \in A$.
Množina $A$ je uzavřená a tak limitním přechodem dostaneme $a + ts \in A$ pro každé $t > 0$.
Tudíž $s \in \mathsf{direct}(A)$.
Tím jsme ověřili, že $\mathsf{direct}(A)$ je uzavřený konvexní kužel.

Q.E.D.

Uzavřená konvexní množina má užitečnou reprezentaci.

**Věta 1.32**: *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina, pak ji lze rozložit na součet množin*

$$A = \mathsf{L}(A) + \mathsf{K}(A) + \mathsf{btt}(A), \tag{1.1}$$
$$A = \mathsf{L}(A) + \mathsf{K}(A) + \mathrm{conv}(\mathsf{btt}(A)), \tag{1.2}$$

*kde*

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(A) &= \mathsf{direct}(A) \cap -\mathsf{direct}(A) \quad \textit{je podprostor } \mathbb{R}^n,\\
\mathsf{L}(A)^{\perp} & \quad \textit{je podprostor } \mathbb{R}^n \textit{ kolmý na } \mathsf{L}(A) \textit{ a } \mathbb{R}^n = \mathsf{L}(A) \oplus \mathsf{L}(A)^{\perp},\\
D &= A \cap \mathsf{L}(A)^{\perp} \quad \textit{je projekce } A \textit{ na } \mathsf{L}(A)^{\perp},\\
\mathsf{K}(A) &= \mathsf{direct}(D) = \mathsf{direct}(A) \cap \mathsf{L}(A)^{\perp} \quad \textit{je projekce } A \textit{ na } \mathsf{L}(A)^{\perp},\\
\mathsf{btt}(A) &= \{x \in D : \forall s \in \mathsf{K}(A),\ s \neq 0 \textit{ je } x - s \notin D\}.
\end{aligned}$$

**Důkaz:** Množina má direktní rozklad

$$A = \mathsf{L}(A) \oplus D.$$

$\mathsf{L}(A)$ je podprostor a $D$ je uzavřená konvexní množina, která neobsahuje žádnou přímku.
Ke každému bodu $d \in D$ přiřadíme

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}(d) &= \{s : d - s \in D,\ s \in \mathsf{K}(A)\},\\
\mathsf{m}(d) &= \sup\{\|s\| : d - s \in D,\ s \in \mathsf{K}(A)\}.
\end{aligned}$$

Zvolme nějaký bod $d \in D$ a povšimněme si, že:

1. Předpokládejme, že $\mathsf{m}(d) = +\infty$.

   Pak existuje posloupnost $s_k \in \mathsf{direct}(D)$, $k \in \mathbb{N}$ taková, že $\lim_{k\to+\infty} \|s_k\| = +\infty$.

   Z kompaktnosti jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$ existuje $s \in \mathbb{R}^n$, které je hromadným bodem posloupnosti $\frac{s_k}{\|s_k\|}$, $k \in \mathbb{N}$. Množina $\mathsf{direct}(D)$ je uzavřená a tak $s \in \mathsf{direct}(D)$.

   Potom pro každé $t > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ takové, že $t \le \|s_k\|$, platí $d - t\frac{s_k}{\|s_k\|} \in D$.

   Norma uvažovaných směrů konverguje do nekonečna. Proto limitním přechodem zjistíme, že pro každé $t > 0$ platí $d - ts \in D$.

   To znamená, že $-s \in \mathsf{direct}(D)$.

   Zjistili jsme, že by $D$ obsahovalo přímku ve směru $s$, což je spor, neboť víme, že $D$ žádnou přímku neobsahuje.

   Ukázali jsme, že $\mathsf{m}(d) < +\infty$ a $\mathsf{M}(d)$ je kompakt.

2. Předpokládejme existenci $\Delta > 0$ takového, že $\mathsf{m}(d - s) > \Delta > 0$ pro všechna $s \in \mathsf{M}(d)$.

   Pak existuje posloupnost $s_k \in \mathsf{direct}(D)$, $k \in \mathbb{N}$ taková, že $\|s_k\| > \Delta$, $s_k \in \mathsf{M}\left(d - \sum_{i=1}^{k-1} s_i\right)$.

   Posloupnost $\sum_{i=1}^{k} s_i$, $k \in \mathbb{N}$ nemůže být konvergentní, ale víme, že její členy jsou z kompaktu $\mathsf{M}(d)$. Pak musí mít tato posloupnost alespoň dva různé hromadné body, označme je $\hat{s}, \hat{v}$.

   Uvědomme si, že pro každé $k, l \in \mathbb{N}$, $k \le l$ platí
   $$\sum_{i=k}^{l} s_i \in \mathsf{M}\left(d - \sum_{i=1}^{k-1} s_i\right) \subset \mathsf{direct}(D).$$

   Pak pro každé $k, l \in \mathbb{N}$, $k \le l$ platí
   $$\sum_{i=1}^{l} s_i - \sum_{i=1}^{k-1} s_i \in \mathsf{direct}(D).$$

   Budeme zvyšovat $k$ a $l$ tak, aby se první suma přibližovala k $\hat{s}$ a druhá k $\hat{v}$. Z uzavřenosti množiny směrů dostáváme $\hat{s} - \hat{v} \in \mathsf{direct}(D)$. Obdobně můžeme zajistit, aby se první suma přibližovala k $\hat{v}$ a druhá k $\hat{s}$, a dostat tak $\hat{v} - \hat{s} \in \mathsf{direct}(D)$.

   Zjistili jsme, že by $D$ obsahovalo přímku ve směru $\hat{s} - \hat{v} \neq 0$, což je spor, neboť víme, že $D$ žádnou přímku neobsahuje.

   Ukázali jsme, že $\inf\{\mathsf{m}(d - s) : s \in \mathsf{M}(d)\} = 0$.

3. Zbývá vyšetřit situaci $\inf\{\mathsf{m}(d - s) : s \in \mathsf{M}(d)\} = 0$.

   Pak existuje posloupnost $s_k \in \mathsf{M}(d)$, $k \in \mathbb{N}$ taková, že $\lim_{k\to+\infty} \mathsf{m}(d - s_k) = 0$.

   $\mathsf{M}(d)$ je kompakt a tak tato posloupnost musí mít hromadný bod, označme jej $\hat{s} \in \mathsf{M}(d)$.

   Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak pro $\phi \in \mathsf{direct}(D)$, $\|\phi\| = \varepsilon$ je $d - s_k - \phi \notin D$ pro velká $k \in \mathbb{N}$.

   Vhodným zvyšování $k$ v limitě získáme $d - \hat{s} - \phi \notin \mathrm{int}(D)$.

   To znamená $\mathsf{m}(d - \hat{s}) \le \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

   Zjistili jsme, že $\mathsf{m}(d - \hat{s}) = 0$. To znamená, že $d - \hat{s} \in \mathsf{btt}(A)$.

Podařilo se nám bod vyjádřit jako $d = \hat{d} + \psi$, kde $\hat{d} \in \mathsf{btt}(A)$ a $\psi \in \mathsf{direct}(D) = \mathsf{K}(A)$. Tím je důkaz rozkladu hotov (1.1). Rozklad (1.2) je jeho důsledkem, neboť množina $A$ je konvexní.

Q.E.D.

## 1.6 Krajní body a krajní směry

Konvexní polyedrické množiny, lze charakterizovat jejich krajními body a krajními směry.

**Definice 1.33** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina. Řekneme, že bod $s \in A$ je krajním bodem $A$, jestliže neexistují body $x, y \in A$, $x \neq y$ a $0 < \lambda < 1$ takové, aby $s = \lambda x + (1-\lambda)y$.*

*Množinu všech krajních bodů množiny $A$ budeme označovat* $\operatorname{ext}(A)$.

**Definice 1.34** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina. Řekneme, že směr $s \in \mathsf{direct}(A)$ je krajním směrem $A$, jestliže $s \neq 0$ a neexistují body $x, y \in \mathsf{direct}(A)$, $x, y \notin \operatorname{pos}(\{s\})$ a $\lambda > 0$, $\varphi > 0$ takové, aby $s = \lambda x + \varphi y$.*

*Množinu všech krajních směrů množiny $A$ budeme označovat* $\operatorname{extd}(A)$.

**Věta 1.35**: *Konvexní polyedr má konečný počet krajních bodů a je jejich konvexním obalem.*

**Důkaz:** Nechť $P = \operatorname{conv}(S)$, kde $S \subset \mathbb{R}^n$ je konečná množina.
Z množiny $S$ budeme postupně vylučovat body tak, že dostaneme posloupnost množin $S_0 = S \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_K$ a body $\hat{s}_i \in S_{i-1}$ tak, že $S_i = S_{i-1} \setminus \{\hat{s}_i\}$.
Bod $\hat{s}_i \in S_{i-1}$ vybereme tak, aby byl konvexní lineární kombinací ostatních bodů z $S_{i-1}$. Pokud takový bod neexistuje, konstrukce končí, tj. $i = K$.

1. Uvědomme si, že platí $\operatorname{conv}(S_0) = \operatorname{conv}(S_1) = \operatorname{conv}(S_2) = \ldots = \operatorname{conv}(S_K) = \operatorname{conv}(S) = P$. Přesvědčíme se o tom konečnou indukcí.

   (a) Pro $i = 0$ tvrzení platí, neboť $S_0 = S$.

   (b) Předpokládejme, že pro $1 \leq i \leq k$ platí $\operatorname{conv}(S_{i-1}) = P$.
   Vezměme $x \in P$. Z indukčního předpokladu a z výběru bodu $\hat{s}_i$ víme, že

   $$x = \sum_{s \in S_{i-1}} \lambda(s)s,\ \hat{s}_i = \sum_{s \in S_i} \varphi(s)s,\ \text{pro vhodná } \lambda \geq 0,\ \varphi \geq 0,\ \sum_{s \in S_{i-1}} \lambda(s) = 1,\ \sum_{s \in S_i} \varphi(s) = 1.$$

   Tudíž

   $$x = \sum_{s \in S_{i-1}} \lambda(s)s = \sum_{s \in S_i} \lambda(s)s + \lambda(\hat{s}_i) \sum_{s \in S_i} \varphi(s)s = \sum_{s \in S_i} (\lambda(s) + \lambda(\hat{s}_i)\varphi(s))\, s \in \operatorname{conv}(S_i)\,.$$

2. Nyní ukážeme, že množina $S_K$ je právě množina všech krajních bodů množiny $P$.

   (a) Ukažme, že žádný z bodů množiny $P \setminus S_K$ není krajním bodem $P$.
   Vezměme bod $x \in P \setminus S_K$. Pak existuje konvexní lineární kombinace taková, že $x = \sum_{s \in S_K} \lambda(s)s$.
   Jistě existuje $\tilde{s} \in S_K$ takový, že $0 < \lambda(\tilde{s}) < 1$, jinak by $x \in S_K$. Pak

   $$x = \lambda(\tilde{s})\tilde{s} + (1 - \lambda(\tilde{s})) \sum_{s \in S_K \setminus \{\tilde{s}\}} \frac{\lambda(s)}{1 - \lambda(\tilde{s})} s.$$

   Z konstrukce množiny $S_K$ víme, že $\tilde{s}, \sum_{s \in S_K \setminus \{\tilde{s}\}} \frac{\lambda(s)}{1-\lambda(\tilde{s})} s \in P$, $\tilde{s} \neq \sum_{s \in S_K \setminus \{\tilde{s}\}} \frac{\lambda(s)}{1-\lambda(\tilde{s})} s$ a tudíž bod $x$ není krajní bod $P$.

   (b) Ještě zbývá ověřit, že body z množiny $S_K$ jsou krajními body.
   Předpokládejme proto, že $\bar{s} \in S_K$ není krajní bod množiny $P$. Pak existují body

   $$y = \sum_{s \in S_K} \lambda(s)s \in P,\ z = \sum_{s \in S_K} \varphi(s)s \in P\,,\ y \neq z \text{ a } 0 < \alpha < 1 \text{ takové, že}$$

   $$\bar{s} = \alpha y + (1-\alpha)z = \sum_{s \in S_K} (\alpha\lambda(s) + (1-\alpha)\varphi(s))s.$$

   Nyní rozlišme dva případy.

i. Nechť $\alpha\lambda(\bar{s}) + (1-\alpha)\varphi(\bar{s}) = 1$. Potom $\lambda(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}) = 1$, což je spor s tím, že $y \neq z$.
ii. Nechť $\alpha\lambda(\bar{s}) + (1-\alpha)\varphi(\bar{s}) < 1$. Potom ale

$$\bar{s} = \sum_{s \in S_K \setminus \{\bar{s}\}} \frac{\alpha\lambda(s) + (1-\alpha)\varphi(s)}{1 - \alpha\lambda\left[\bar{s} + (1-\alpha)\varphi(\bar{s})\right]}\, s.$$

To je spor s tím, že žádný z bodů množiny $S_K$ nelze napsat jako konvexní lineární kombinaci ostatních bodů z $S_K$.

Ukázali jsme, že množina $S_K$ je množinou všech krajních bodů konvexního polyedru $P$ a $P = \mathrm{conv}\,(S_K)$.

Q.E.D.

Mezi konvexními polyedry jsou důležité speciální polyedry dané dimenze.

**Definice 1.36** *Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je simplex, jestliže je konvexní množina a každý její bod lze vyjádřit jako jednoznačně určenou konvexní lineární kombinaci jejích krajních bodů.*

**Lemma 1.37** *Když množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je simplex a její dimenze (tj. dimenze nejmenšího lineálu v němž je obsažena) je $d \in \mathbb{N}$, pak má právě $d+1$ krajních bodů a je jejich konvexním obalem.*

**Důkaz:** Tvrzení uvádíme bez důkazu. Zájemci jej naleznou v [6].

Q.E.D.

## 1.7 Další vlastnosti

Mezi definovanými objekty je ještě řada zajímavých a důležitých vztahů. K jejich důkazu však nemáme připravenu potřebnou důkazovou techniku. Uvádíme je proto bez důkazů. Zájemce odkazujeme na [6].

**Tvrzení 1.38** *Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní polyedr tehdy a jen tehdy, když je omezená konvexní polyedrická množina.*

**Důkaz:** Důkaz lze nalézt v [6].

Q.E.D.

**Tvrzení 1.39** *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní polyedrický kužel, pak je konvexní polyedrická množina.*

**Důkaz:** Důkaz lze nalézt v [6].

Q.E.D.

**Věta 1.40**: *Konvexní polyedrický kužel, který neobsahuje žádnou přímku, má konečný počet krajních směrů a je roven konvexnímu kuželi, který je jimi generován.*

**Důkaz:** Důkaz lze nalézt v [6].

Q.E.D.

## 1.8 Cvičení a doplňky

**Cvičení 1.41:** Rozhodněte, zda množinové operace sjednocení a rozdíl dvou množin zachovávají konvexnost.

△

**Cvičení 1.42:** Rozhodněte, zda je hranice konvexní množiny nutně konvexní nebo ne.

△

**Cvičení 1.43:** Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku, že pro každé $x, y \in A$ je také $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A$.

- Je tato množina již nutně konvexní?
- Víme-li navíc, že $A$ je uzavřená. Je pak již nutně konvexní?
- Víme-li navíc, že $A$ je otevřená. Je pak již nutně konvexní?

△

**Cvičení 1.44:** Charakterizujte konvexní množiny jejichž hranice je konvexní.

△

**Cvičení 1.45:** Charakterizujte konvexní množiny jejichž doplněk je také konvexní množina.

△

**Cvičení 1.46:** Když konvexní uzavřená množina obsahuje polopřímku, pak s každým svým bodem obsahuje též tuto polopřímku posunutou do tohoto bodu.

△

**Cvičení 1.47:** Konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ je Lebesgueovsky měřitelná.

△

**Cvičení 1.48:** Konvexní množina v $\mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná. Je totiž intervalem.

△

**Cvičení 1.49:** Konvexní množina v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ nemusí být borelovsky měřitelná.

Jako příklad si můžeme uvést otevřený jednotkový kruh $K = \{x : \|x\| < 1, x \in \mathbb{R}^n\}$ a sféru $S = \{x : \|x\| = 1, x \in \mathbb{R}^n\}$. Existuje borelovsky neměřitelná množina $D \subset S$. Pak množina $K \cup D$ je konvexní množina a není borelovsky měřitelná.

△

# Kapitola 2

# Konvexní funkce

## 2.1 Obecné pojmy

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi definovanými na konečně dimenzionálním Euklidově prostoru s hodnotami v rozšířené reálné přímce, tj. kromě reálných hodnot připustíme i hodnoty $+\infty$ a $-\infty$. Rozšířenou reálnou přímku označujeme $\mathbb{R}^*$.

**Definice 2.1** *Pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ definujeme její epigraf a hypograf*

$$\begin{aligned} \mathsf{epi}\,(f) &= \{(x, \eta) \,:\, f\,(x) \le \eta,\, x \in \mathbb{R}^n,\, \eta \in \mathbb{R}\}\,, &(2.1)\\ \mathsf{hypo}\,(f) &= \{(x, \eta) \,:\, f\,(x) \ge \eta,\, x \in \mathbb{R}^n,\, \eta \in \mathbb{R}\} &(2.2)\end{aligned}$$

*a také její doménu*

$$\mathsf{Dom}\,(f) = \{x \,:\, f\,(x) < +\infty,\, x \in \mathbb{R}^n\}\,. \tag{2.3}$$

**Definice 2.2** *Budeme říkat, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je vlastní, jestliže $f\,(x) > -\infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.*

Připuštění hodnoty $+\infty$ má velký význam pro optimalizaci, zejména pro její teorii. Umožňuje jednodušší a přehlednější zápis optimalizační úlohy. Optimalizační úlohu $\inf\,\{f\,(x) \,:\, x \in D\}$ můžeme zapsat jako hledání „ volného extrému“ $\inf\left\{\tilde{f}(x) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\right\}$, kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f\,(x) & \text{když } x \in D, \\ +\infty & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Povšimněme si charakterizace epigrafu funkce.

**Lemma 2.3** *Množina $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je epigrafem nějaké funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ tehdy a jen tehdy, když pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že*

$$\{\eta \,:\, (x, \eta) \in E\} \quad \textit{je buď} \quad \emptyset \quad \textit{nebo} \quad \mathbb{R} \quad \textit{nebo} \quad [\hat{\eta}, +\infty) \ \textit{pro vhodné}\ \hat{\eta} \in \mathbb{R}.$$

*Pokud $E$ je epigrafem nějaké funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$, pak $f\,(x) = \min\,\{\eta \,:\, (x, \eta) \in E\}$.*

**Důkaz:** Vlastnost je evidentní.

Q.E.D.

Korespondence mezi funkcí a jejím epigrafem je proto vzájemně jednoznačná. Umožňuje nám si uvědomit následující vlastnost epigrafu a hypografu.

**Lemma 2.4** *Mějme funkce $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ pro každé $i \in I$, pak*

$$\mathsf{epi}\left(\sup_{i\in I} f_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathsf{epi}\,(f_i)\,,\ \ \mathsf{hypo}\left(\inf_{i\in I} f_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathsf{hypo}\,(f_i)\,, \tag{2.5}$$

$$\mathsf{epi}\left(\inf_{i\in I} f_i\right) \supset \bigcup_{i\in I} \mathsf{epi}\,(f_i)\,,\ \ \mathsf{hypo}\left(\sup_{i\in I} f_i\right) \supset \bigcup_{i\in I} \mathsf{hypo}\,(f_i)\,. \tag{2.6}$$

*Pro $I$ konečnou platí rovnosti*

$$\mathsf{epi}\left(\inf_{i\in I} f_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathsf{epi}\,(f_i)\,,\ \ \mathsf{hypo}\left(\sup_{i\in I} f_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathsf{hypo}\,(f_i)\,. \tag{2.7}$$

**Důkaz:** Jde o přímý důsledek charakterizace uvedené v lemmatu 2.3. Je třeba si pouze uvědomit, že průnikem a konečným sjednocením intervalů typu $[\xi, +\infty)$ dostaneme opět interval stejného typu. Sjednocení libovolného počtu intervalů již tuto vlastnost nemá. Obdobně průnikem a konečným sjednocením intervalů typu $(-\infty, \xi]$ dostaneme interval stejného typu. Sjednocení libovolného počtu intervalů již tuto vlastnost obecně nemá.

Q.E.D.

## 2.2 Definice konvexní funkce

**Definice 2.5** *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je konvexní, jestliže $\mathsf{epi}\,(f)$ je konvexní množina.*

Konvexnost funkce lze ekvivalentně vyjádřit.

**Lemma 2.6** *Když je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ konvexní, pak $\mathsf{Dom}\,(f)$ je konvexní množina.*

**Důkaz:** Nechť $x, y \in \mathsf{Dom}\,(f)$ a $0 < \lambda < 1$.
Pak existuje $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \le \eta$ a $f(y) \le \xi$. Tudíž $(x, \eta), (y, \xi) \in \mathsf{epi}\,(f)$.
Z konvexnosti $\mathsf{epi}\,(f)$ plyne, že $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\eta + (1-\lambda)\xi) \in \mathsf{epi}\,(f)$.
Tudíž $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\eta + (1-\lambda)\xi < +\infty$.
Proto $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathsf{Dom}\,(f)$ a tím je konvexnost množiny $\mathsf{Dom}\,(f)$ ukázána.

Q.E.D.

**Věta 2.7**: *Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je konvexní tehdy a jen tehdy, když $\mathsf{Dom}\,(f)$ je konvexní množina a pro každé $x, y \in \mathsf{Dom}\,(f)$ a $0 < \lambda < 1$ platí*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,. \tag{2.8}$$

**Důkaz:**

1. Nechť $f$ je konvexní.
   Pak podle lemmatu 2.6 víme, že $\mathsf{Dom}\,(f)$ je konvexní množina.
   Nechť $x, y \in \mathsf{Dom}\,(f)$ a $0 < \lambda < 1$.
   Pak pro každé $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ taková, že $f\,(x) \le \eta$ a $f\,(y) \le \xi$, je $(x,\eta), (y,\xi) \in \mathsf{epi}\,(f)$.
   Z konvexnosti $\mathsf{epi}\,(f)$ plyne, že $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\eta + (1-\lambda)\xi) \in \mathsf{epi}\,(f)$.
   Tudíž $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\eta + (1-\lambda)\xi < +\infty$.
   Minimalizací přes všechna možná $\eta, \xi$ dostaneme (2.8).
2. Nechť je splněna vlastnost (2.8).
   Vezměme $(x,\eta), (y,\xi) \in \mathsf{epi}\,(f)$ a $0 < \lambda < 1$. Pak
   $$\lambda\eta + (1-\lambda)\xi \ge \lambda f\,(x) + (1-\lambda) f\,(y) \ge f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$
   Tudíž $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\eta + (1-\lambda)\xi) \in \mathsf{epi}\,(f)$.
   Ukázali jsme, že $\mathsf{epi}\,(f)$ je konvexní množina, a to znamená, že $f$ je konvexní funkce.

Q.E.D.

Věta 2.7 ukazuje, že se definice 2.5 shoduje s definicí konvexity funkce, kterou jsme používali dříve, aplikujeme-li ji na funkci $f : \mathsf{Dom}\,(f) \to \mathbb{R}^*$.
Konvexní funkce nabývající hodnoty $-\infty$ je poněkud degenerovaná.

**Lemma 2.8** *Mějme konvexní funkci* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$. *Pak buď* $f\,(x) \in \mathbb{R}$ *pro každé* $x \in \mathsf{Dom}\,(f)$ *nebo* $f\,(x) = -\infty$ *pro každé* $x \in \mathrm{rint}\,(\mathsf{Dom}\,(f))$.

**Důkaz:** Nechť $x \in \mathsf{Dom}\,(f)$ a $f\,(x) = -\infty$.
Když $y \in \mathrm{rint}\,(\mathsf{Dom}\,(f))$, pak existuje $z \in \mathsf{Dom}\,(f)$ a $0 < \lambda \le 1$ tak, že $y = \lambda x + (1-\lambda)z$.
Použitím podmínky (2.8) dostáváme

$$f\,(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \le \lambda f\,(x) + (1-\lambda) f(z) = -\infty.$$

Q.E.D.

**Věta 2.9**: *Když je funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ *konvexní a vlastní, pak je spojitá na* $\mathrm{rint}\,(\mathsf{Dom}\,(f))$.

**Důkaz:** Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathrm{int}\,(\mathsf{Dom}\,(f)) \ne \emptyset$. Jinak bychom problém uvažovali pouze v rámci lineálu nejmenší dimenze, který obsahuje $\mathsf{Dom}\,(f)$.

Nechť $x \in \mathrm{int}\,(\mathsf{Dom}\,(f))$.
Pak existuje $\Delta > 0$ tak, že $x + \Delta \mathsf{e}_{i:n}, x - \Delta \mathsf{e}_{i:n} \in \mathsf{Dom}\,(f)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$; kde $\mathsf{e}_{i:n}$ je bazický vektor obsahující jedničku na $i$-tém místě a jinak nuly.
Z konvexnosti $\mathsf{Dom}\,(f)$ víme, že $\mathcal{M} = \mathrm{conv}\,(\{x + \Delta \mathsf{e}_{i:n}, x - \Delta \mathsf{e}_{i:n} \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}) \subset \mathsf{Dom}\,(f)$.
Každý bod $y \in \mathcal{M}$ se dá zapsat ve tvaru
$y = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,+}(x + \Delta \mathsf{e}_{i:n}) + \sum_{i=1}^n \lambda_{i,-}(x - \Delta \mathsf{e}_{i:n})$, kde $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,+} + \sum_{i=1}^n \lambda_{i,-} = 1$ a $\lambda_{i,+}, \lambda_{i,-} \ge 0$.
Odtud pro $y \in \mathcal{M}$ dostáváme odhad

$$\begin{aligned} f\,(y) &\le \sum_{i=1}^n \lambda_{i,+} f(x + \Delta \mathsf{e}_{i:n}) + \sum_{i=1}^n \lambda_{i,-} f(x - \Delta \mathsf{e}_{i:n}) \le \Xi < +\infty, \\ \text{kde} &\quad \Xi := \max\left\{ f(x + \Delta \mathsf{e}_{i:n}), f(x - \Delta \mathsf{e}_{i:n}) \,:\, i = 1, 2, \ldots, n \right\}. \end{aligned}$$

Bod $y \in \mathcal{M}$ můžeme reprezentovat také jako $y = x + \delta s$, kde $\sum_{i=1}^{n} |\hat{s}_i| = \Delta$ a $0 \le \delta \le 1$.
Pak

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x+\delta s) = f((1-\delta)x + \delta(x+s)) \le (1-\delta)f(x) + \delta f(x+s) \le (1-\delta)f(x) + \delta\Xi\,, \\ f(x) &= f\left(\frac{1}{1+\delta}(x+\delta s) + \frac{\delta}{1+\delta}(x-s)\right) \le \frac{1}{1+\delta}f(x+\delta s) + \frac{\delta}{1+\delta}f(x-s) \le \frac{1}{1+\delta}f(y) + \frac{\delta}{1+\delta}\Xi\,. \end{aligned}$$

Dohromady máme odhad

$$(1+\delta)f(x) - \delta\Xi \le f(y) \le (1-\delta)f(x) + \delta\Xi\,. \tag{2.9}$$

Tím je spojitost v bodě $x \in \operatorname{int}(\mathsf{Dom}(f))$ ukázána.

Q.E.D.

Spojitost v krajních bodech domény není jednoduchou otázkou. Uveďme si pouze nutnou podmínku, která platí pro obecnou vlastní funkci.

**Věta 2.10**: *Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ vlastní a spojitá na $\mathsf{Dom}(f)$. Pak*

$$\mathsf{epi}(f) = \operatorname{clo}(\mathsf{epi}(f)) \cap (\mathsf{Dom}(f) \times \mathbb{R})\,.$$

**Důkaz:** Nechť $x \in \mathsf{Dom}(f)$ a $(x, \eta) \in \operatorname{clo}(\mathsf{epi}(f))$.
Potom existuje posloupnost $(x_k, \eta_k) \in \mathsf{epi}(f)$, která konverguje k $(x, \eta)$.
Tudíž platí $f(x_k) \le \eta_k$.
Funkce je spojitá na $\mathsf{Dom}(f)$, limitním přechodem proto dostáváme $f(x) \le \eta$.
To však znamená, že $(x, \eta) \in \mathsf{epi}(f)$.

Q.E.D.

Věta má jednoduchý důsledek.

**Důsledek:** Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ vlastní, spojitá na $\mathsf{Dom}(f)$ a $\mathsf{Dom}(f)$ je uzavřená množina. Pak $\mathsf{epi}(f)$ je také uzavřená množina. ♣

**Důkaz:** Tvrzení je jednoduchým důsledkem předchozí věty 2.10, neboť když je $\mathsf{Dom}(f)$ uzavřená množina, pak platí

$$\operatorname{clo}(\mathsf{epi}(f)) \cap (\mathsf{Dom}(f) \times \mathbb{R}) = \operatorname{clo}(\mathsf{epi}(f))\,.$$

Q.E.D.

**Věta 2.11**: *Když jsou funkce $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ konvexní pro každé $i \in I$, pak $\sup\limits_{i \in I} f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je také konvexní.*

**Důkaz:** Podle lemmatu 2.4 platí $\mathsf{epi}\left(\sup\limits_{i\in I} f_i\right) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathsf{epi}(f_i)$.
Průnik libovolného počtu konvexních množin je opět konvexní množina, viz lemma 1.5.
Tím je tvrzení dokázáno.

Q.E.D.

**Věta 2.12**: *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou množiny $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ a $\{x : f(x) < \alpha\}$ konvexní.*

*Tyto množiny se nazývají úrovňové množiny funkce f (level sets).*

**Důkaz:** Stačí ověřit konvexnost množiny $\{x : f(x) < \alpha\}$, neboť $\{x : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{\beta > \alpha} \{x : f(x) < \beta\}$. Vezměme $y, z \in \{x : f(x) < \alpha\}$ a $0 < \lambda < 1$. Potom $y, z \in \mathsf{Dom}(f)$ a platí

$$f(\lambda y + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) < \alpha.$$

Q.E.D.

Důsledkem této vlastnosti je, že množina přípustných řešení úlohy konvexního programování je konvexní, tj. $\{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \leq \alpha_1, g_2(x) \leq \alpha_2, \ldots, g_k(x) \leq \alpha_k\}$ je konvexní množina, pokud funkce $g_1, g_2, \ldots, g_k$ jsou konvexní.

Konvexnost množin $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ a $\{x : f(x) < \alpha\}$ však nezaručuje, že funkce $f$ je konvexní.

**Příklad 2.13:** Funkce $f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{pokud } x > 0 \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases}$ konvexní není, ale její úrovňové množiny $\{x : f(x) \leq \alpha\} = (0, \mathsf{e}^\alpha]$, $\{x : f(x) < \alpha\} = (0, \mathsf{e}^\alpha)$ jsou konvexní pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

△

**Definice 2.14** *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je*

*i) ryze konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in \mathsf{Dom}(f)$, $x \neq y$ a $0 < \lambda < 1$ platí nerovnost*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad .$$

*ii) konkávní, jestliže je funkce $-f$ konvexní.*

*iii) ryze konkávní, jestliže je funkce $-f$ ryze konvexní.*

Konkávní funkci lze ekvivalentně definovat tak, že je to funkce jejíž hypograf je konvexní množina.

Konvexní funkce mají velkou důležitost v teorii optimalizace, protože jejich lokální minima jsou zároveň globálními minimy.

**Věta 2.15**: *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je konvexní funkce a vlastní. Pak každé její lokální minimum na $\mathsf{Dom}(f)$ je jejím globálním minimem na $\mathsf{Dom}(f)$. Množina všech globálních minim je konvexní.*

**Důkaz:** Nechť $\hat{x} \in \mathsf{Dom}(f)$ je lokálním minimem funkce $f$, ale není jejím globálním minimem.
Pak existuje $y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(y) < f(\hat{x})$.
Pak $y \in \mathsf{Dom}(f)$ a pro každé $\alpha \in (0,1)$ platí $f(\alpha\hat{x} + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(\hat{x}) + (1-\alpha) f(y) < f(\hat{x})$.
To je ovšem ve sporu s předpokladem, že $\hat{x}$ je lokálním minimem funkce $f$.
Tudíž $\hat{x}$ musí být globálním minimem funkce $f$.
Množina všech globálních minim je konvexní protože je rovna množině
$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \inf\{f(y) : y \in \mathbb{R}^n\}\}$, která je konvexní podle věty 2.12.

Q.E.D.

**Věta 2.16**: *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je ryze konvexní a vlastní funkce, která má na $\mathsf{Dom}\,(f)$ nějaké lokální minimum. Pak má tato funkce globální minimum na $\mathsf{Dom}\,(f)$, které je jednoznačně určeno a je jejím jediným lokálním minimem.*

**Důkaz:** Podle věty 2.15 víme, že každé lokální minimum funkce $f$ na $\mathsf{Dom}\,(f)$ je také jejím globálním minimem. Stačí si proto pouze uvědomit, že globální minimum $f$ na $\mathsf{Dom}\,(f)$ je určeno jednoznačně. Vezměme $\hat{x}$ jedno globální minimum funkce $f$ na $\mathsf{Dom}\,(f)$ a bod $y \in \mathsf{Dom}\,(f)$, $y \neq \hat{x}$. Pak z ryzí konvexnosti plyne, že

$$f\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}f(\hat{x}) + \frac{1}{2}f\left(y\right).$$

Odtud

$$f\left(y\right) > 2f\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}y\right) - f(\hat{x}) \geq 2f(\hat{x}) - f(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Tudíž $\hat{x}$ je jediným globálním minimem funkce $f$ na $\mathsf{Dom}\,(f)$.

Q.E.D.

Uvědomme si některé základní vlastnosti konvexních funkcí. Nejprve si připomeňme vlastnosti konvexních funkcí jedné proměnné.

## 2.3 Vlastnosti konvexních funkcí jedné proměnné

Tato podkapitola shrnuje základní vlastnosti konvexních funkci jedné proměnné. Uvádíme je bez důkazu, zájemce odkazujeme na základní přednášky z matematické analýzy a z teorie pravděpodobnosti.

Uvažujeme funkci $f : J \to \mathbb{R}$ definovanou na konvexní množině $J \subset \mathbb{R}$ (poznamenejme, že jedinými konvexními množinami na reálné přímce jsou prázdná množina, body a intervaly). Nejdříve shrňme, jakou hladkost má tato funkce pokud je konvexní.

**Věta 2.17**: *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : J \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak má funkce $f$ následující vlastnosti.*

*i) Je spojitá na $\mathrm{int}\,(J)$. V krajních bodech intervalu $J$ může dojít ke skoku ale, musí platit $f(a) \geq f(a+)$, pokud $a$ je levý krajní bod $J$, případně $f(a) \geq f(a-)$, pokud $a$ je pravý krajní bod $J$.*

*ii) V každém bodě $x \in \mathrm{int}\,(J)$ existují konečné derivace zleva i zprava; tj.*

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f\left(x\right)}{h} \in \mathbb{R} \quad , \quad f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f\left(x\right)}{h} \in \mathbb{R}.$$

*Pro tyto derivace platí $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$ pro každé $x, y \in \mathrm{int}\,(J)$, $x < y$.*

*iii) $f'$ existuje na $J$ až na nejvýše spočetně bodů.*

*iv) $f''$ existuje na $J$ až na množinu Lebesgueovy míry nula.*

*v) Platí Jensenova nerovnost, tj. $f\left(\mathsf{E}\left[X\right]\right) \leq \mathsf{E}\left[f(X)\right]$ pro každou reálnou náhodnou veličinu $X$ s konečnou střední hodnotou a s $\mathsf{P}\left(X \in J\right) = 1$.*

*vi) Platí nerovnost $f\left(\sum_{i=1}^k p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k p_i f\left(x_i\right)$ pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_k \in J$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $\ldots$, $p_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.*

Připomeňme, že vi) je zvláštním případem v). Stačí uvažovat náhodnou veličinu $X$ nabývající pouze hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Shrňme nyní základní kritéria umožňující ověřit konvexnost funkce.

**Věta 2.18**: *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce, pak platí:*

- *Funkce $f$ je konvexní $\Leftrightarrow$ $f'_+$ existuje konečná a neklesající na $J$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $f'_-$ existuje konečná a neklesající na $J$.*
- *Když je funkce $f$ diferencovatelná na $J$, pak $f$ je konvexní $\Leftrightarrow$ $f'$ je neklesající na $J$.*
- *Když je funkce $f$ dvakrát diferencovatelná na $J$, pak $f$ je konvexní $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$ na $J$.*

## 2.4 Vlastnosti konvexních funkcí více proměnných

Tato podkapitola shrnuje základní vlastnosti konvexních funkci více proměnných. Tvrzení uvádíme bez důkazu, zájemce odkazujeme na základní přednášky z matematické analýzy, lineární algebry a teorie pravděpodobnosti.

Uvažujeme funkce $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ definované na konvexní množině $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$.

**Lemma 2.19** *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f_1 : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$, $\ldots$, $f_k : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ jsou konvexní funkce. Pak pro každé váhy $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $\ldots$, $a_k \geq 0$ je $\sum_{i=1}^k a_i f_i : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ opět konvexní funkcí.*

**Důkaz:** Čtenář si lehce dokáže sám.

Q.E.D.

**Věta 2.20** (Jensenova nerovnost): *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak pro reálný náhodný vektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top$ s konečnou střední hodnotou a $\mathsf{P}(X \in \mathsf{D}) = 1$ platí $\mathsf{E}[X] \in \mathsf{D}$ a $f(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[f(X)]$.*

**Důkaz:** Důkaz je uveden například v [5], věta 5.9 na str.26.

Q.E.D.

Jako důsledek dostáváme zobecnění vlastnosti (2.8) („ deterministickou Jensenovu nerovnost“).

**Věta 2.21**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathsf{D}$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $\ldots$, $p_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ je splněna nerovnost*

$$f\left(\sum_{i=1}^k p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k p_i f(x_i).$$

**Důkaz:** Věta je speciálním případem věty 2.20. Stačí uvažovat náhodnou veličinu $X$ nabývající pouze hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Q.E.D.

Konvexnost funkce lze ověřovat pomocí konvexity reálných funkcí jedné proměnné.

**Věta 2.22**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$. Pak je funkce $f$ konvexní tehdy a jen tehdy, když jsou funkce $\varphi_{x,s} : \mathsf{D}_{x,s} \to \mathbb{R}$ konvexní pro každé $x \in \mathsf{D}$ a každé $s \in \mathbb{R}^n$, kde $\varphi_{x,s}(t) = f(x+ts)$ a $\mathsf{D}_{x,s} = \{t : x + ts \in \mathsf{D}, t \in \mathbb{R}\}$. (Poznamenejme, že množina $\mathsf{D}_{x,s}$ je vždy interval.)*

**Důkaz:**

1. Pro $x \in \mathsf{D}$ a $s \in \mathbb{R}^n$ ukážeme konvexitu množiny $\mathsf{D}_{x,s}$.

   Pro $t_1, t_2 \in \mathsf{D}_{x,s}$ a $0 < \lambda < 1$ platí

   $$x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)s = \lambda(x + t_1 s) + (1-\lambda)(x + t_2 s) \in \mathsf{D},$$

   protože $x + t_1 s, x + t_2 s \in \mathsf{D}$ a $\mathsf{D}$ je konvexní množina.
   Tím jsme ověřili, že $\mathsf{D}_{x,s}$ je konvexní množinou v $\mathbb{R}$, je tudíž intervalem.

2. Nechť $f$ je konvexní funkce a $x \in \mathsf{D}$, $s \in \mathbb{R}^n$.
   Pak pro $t_1, t_2 \in \mathsf{D}_{x,s}$ a $0 < \lambda < 1$ platí

   $$\varphi_{x,s}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f\left(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)s\right) = f\left(\lambda(x + t_1 s) + (1-\lambda)(x + t_2 s)\right) \le$$
   $$\le \lambda f(x + t_1 s) + (1-\lambda) f(x + t_2 s) = \lambda \varphi_{x,s}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_{x,s}(t_2)\ .$$

   Ověřili jsme, že $\varphi_{x,s}$ je konvexní funkce na intervalu $\mathsf{D}_{x,s}$.

3. Nechť jsou funkce $\varphi_{x,s}$ konvexní na $\mathsf{D}_{x,s}$ pro každé $x \in \mathsf{D}$ a $s \in \mathbb{R}^n$.
   Vezměme body $x, y \in \mathsf{D}$, $0 < \lambda < 1$ a položme $s = x - y$. Pak platí

   $$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) = f\left(y + \lambda s\right) = \varphi_{y,s}(\lambda) \le \lambda \varphi_{y,s}(1) + (1-\lambda)\varphi_{y,s}(0) = \lambda f\left(x\right) + (1-\lambda) f\left(y\right)\ .$$

   Ověřili jsme, že $f$ je konvexní funkcí.

Q.E.D.

Tato vlastnost se dá s výhodou využít k přenosu kritérií pro poznání konvexních funkcí.

**Věta 2.23**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace. Pak*

$$f \text{ je konvexní} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} t \in \mathsf{D}_{x,s} \mapsto s^\top \nabla_x f(x+ts) \\ \text{je neklesající funkcí na } \mathsf{D}_{x,s} \text{ pro každé } x \in \mathsf{D},\ s \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{2.10}$$

**Důkaz:** Podle věty 2.22 stačí ověřit konvexnost všech jednorozměrných restrikcí dané funkce.
Vezměme tedy $x \in \mathsf{D}$, $s \in \mathbb{R}^n$ a vyšetřeme funkci $\varphi_{x,s}$.
Funkce $f$ má spojité parciální derivace, proto platí $\varphi'_{x,s}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ts)\hat{s}_i = s^\top \nabla_x f(x+ts)$.
Tudíž podle věty 2.18

$$\varphi_{x,s} \text{ je konvexní} \quad \Leftrightarrow \quad t \in \mathsf{D}_{x,s} \mapsto s^\top \nabla_x f(x+ts) \quad \text{je neklesající funkcí.}$$

Tím je tvrzení věty dokázáno.

Q.E.D.

**Věta 2.24**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace. Pak*

$$f \text{ je konvexní} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2_{x,x} f(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i=1,j=1}^{n,n} \quad \text{je pozitivně semidefinitní pro každé } x \in \mathsf{D}. \tag{2.11}$$

**Důkaz:** Podle věty 2.22 stačí ověřit konvexnost všech jednorozměrných restrikcí dané funkce. Vezměme tedy $x \in \mathsf{D}$, $s \in \mathbb{R}^n$ a vyšetřeme funkci $\varphi_{x,s}$.
Funkce $f$ má spojité druhé parciální derivace, proto platí

$$\varphi''_{x,s}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + ts)\, \hat{s}_i\, s_j = s^\top \nabla^2_{x,x} f(x + ts)\; s.$$

Tudíž

$$\varphi_{x,s} \text{ je konvexní} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, t \in \mathsf{D}_{x,s} \quad \text{je } s^\top \nabla^2_{x,x} f(x + ts)\; s \geq 0.$$

To však znamená, že funkce $f$ je konvexní tehdy a jen tehdy, když její Hessian je pozitivně semidefinitní na $\mathsf{D}$. Tím je tvrzení věty dokázáno.

Q.E.D.

Připomeňme si pojem pozitivně semidefinitní a definitní matice a jeho ekvivalentní definice.

**Lemma 2.25** *Pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je následující ekvivalentní:*

- *$A$ je pozitivně semidefinitní.*
- *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top A x \geq 0$.*
- *Všechna vlastní čísla matice $A$ jsou nezáporná.*
- *Determinanty všech hlavních podmatic matice $A$ jsou nezáporné, tj.*

$$\forall\, I \subset \{1, 2, \ldots, n\},\ I \neq \emptyset \quad \textit{je} \quad \det\left(A_{i,j}, i, j \in I\right) \geq 0.$$

**Lemma 2.26** *Pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je následující ekvivalentní:*

- *$A$ je pozitivně definitní.*
- *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \mathbf{0}$ platí $x^\top A x > 0$.*
- *Všechna vlastní čísla matice $A$ jsou kladná.*
- *Determinanty všech hlavních rohových podmatic matice $A$ jsou kladné, tj.*

$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \textit{je} \quad \det\left(A_{i,j}, i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}\right) > 0.$$

Dále si připomeňme hladkost konvexní funkce.

**Věta 2.27**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Potom $f$ je spojitá na* $\operatorname{rint}(\mathsf{D})$.

**Důkaz:** Věta je pouze přeformulováním věty 2.9.

Q.E.D.

**Věta 2.28**: *Nechť* $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina a* $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ *má spojité parciální derivace v okolí bodu* $x \in \mathsf{D}$, *pak* $f$ *má v bodě* $x$ *totální diferenciál.*

**Důkaz:** Jedná se o větu z funkcionální analýzy.

Q.E.D.

**Věta 2.29**: *Nechť* $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ *je konvexní otevřená množina a* $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ *je funkce. Má-li* $f$ *spojité parciální derivace na celém* $\mathsf{D}$, *pak*

$$f \quad \textit{je konvexní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, x, y \in \mathsf{D} \quad \textit{platí} \quad f(x) - f(y) \geq (x - y)^\top \nabla_x f(y). \tag{2.12}$$

**Důkaz:**

1. **Nutnost.**
Zvolme $x, y \in \mathsf{D}$, označme $h = x - y$, $\quad \varphi(\mu) = f(y + \mu h)$. Pak $\varphi$ je konvexní diferencovatelná funkce na $\mathsf{D}_{y,h}$ a její derivace je $\varphi'(\mu) = h^\top \nabla_x f(y + \mu h)$. Podle věty o střední hodnotě existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že
$$f(x) - f(y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \geq \varphi'(0) = h^\top \nabla_x f(y) = (x - y)^\top \nabla_x f(y),$$
neboť derivace konvexní diferencovatelné funkce je neklesající funkce.

2. **Postačitelnost.**
Zvolme $y, z \in \mathsf{D}$, $\quad \lambda \in (0, 1)$ a označme $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. Podle předpokladu platí:
$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq (y - x)^\top \nabla_x f(x) \\ f(z) - f(x) &\geq (z - x)^\top \nabla_x f(x) \end{aligned}$$
Odtud
$$\lambda f(y) + (1 - \lambda) f(z) \geq f(x) + (\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x))^\top \nabla_x f(x) = f(x) = f(\lambda y + (1 - \lambda) z).$$
Podle věty 2.7 je $f$ konvexní.

Q.E.D.

Tato vlastnost je zobecněna pojmy subdiferenciál a subgradient.

**Definice 2.30** *Nechť* $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ *je množina a* $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ *je funkce. Řekneme, že* $f$ *má v bodě* $x \in \mathsf{D}$ *subgradient* $a \in \mathbb{R}^n$, *jestliže platí*

$$f(y) - f(x) \geq a^\top (y - x) \ \textit{pro každé} \ y \in \mathsf{D}. \tag{2.13}$$

*Množinu všech subgradientů v bodě* $x$ *budeme nazývat subdiferenciál funkce* $f$ *v bodě* $x$ *a budeme ji značit* $\partial f(x)$.

Pro optimalizaci je důležitá vlastnost subdiferenciálu, která zobecňuje metodu hledání extrémů funkce pomocí nulové derivace.

**Věta 2.31**: *Nechť* $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$, $x^* \in \mathsf{D}$ *a* $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ *je funkce. Pak* $x^*$ *je bod globálního minima funkce* $f$ *na množině* $\mathsf{D}$ *tehdy a jen tehdy, když* $\mathbf{0} \in \partial f\,(x^*)$.

**Důkaz:** Tvrzení věty plyne triviálně z definice subgradientu, neboť

$$\mathbf{0} \in \partial f\,(x^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathsf{D}\ f\,(x) \geq f(x^*).$$

Q.E.D.

# Kapitola 3

# Oddělitelnost konvexních množin

K vybudování teorie matematického programování, neboli metod a postupů vhodných pro řešení optimalizačních úloh, je zapotřebí využít Hahnovy-Banachovy věty, viz. [4] kapitola 2. Nepotřebujeme ji však v její plné obecnosti. Pro naši potřebu stačí ukázat věty o oddělitelnosti konvexních množin v konečně dimenzionálním Euklidově prostoru. Věty o oddělitelnosti jsou sice jedním z důsledků obecné Hahnovy-Banachovy věty. My je však pro názornost ukážeme přímo, pouze na základě vyložené teorie konvexních množin v konečně dimenzionálním Euklidově prostoru.

Připomeňme si nejdříve geometrickou poučku, že v rovnoběžníku je součet čtverců stran roven součtu čtverců úhlopříček.

**Lemma 3.1** *Když $x, y \in \mathbb{R}^n$, pak platí $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.*

**Důkaz:** Formule se ukáže umocněním

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2x^\top y + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2x^\top y + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Q.E.D.

Připomeňme větu o projekci bodu na konvexní uzavřenou množinu.

**Věta 3.2** (o projekci): *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní uzavřená množina, $K \neq \emptyset$ a $x \in \mathbb{R}^n$ je daný bod. Potom existuje právě jeden bod $\hat{x} \in K$ takový, že $\|x - \hat{x}\| = \min\{\|x-y\| \,:\, y \in K\}$.*

*Tento bod je jednoznačně charakterizován podmínkou*

$$(x-\hat{x})^\top (y - \hat{x}) \leq 0 \text{ pro každé } y \in K. \tag{3.1}$$

*Bod $\hat{x}$ nazýváme projekcí bodu $x$ na množinu $K$.*

**Důkaz:** Nejdříve označme $\Delta = \inf\{\|x-y\| \,:\, y \in K\}$.

1. Existence

   Vezměme posloupnost $y_i \in K$, $i \in \mathbb{N}$ takovou, že $\lim_{i\to+\infty} \|x - y_i\| = \Delta$.

   Z rovnoběžníkové rovnosti, viz lemma 3.1, dostáváme pro každou dvojici $i, j \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\|y_i - y_j\|^2 = 2\|x-y_i\|^2 + 2\|x-y_j\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_i+y_j)\right\|^2 .$$

Z konvexnosti $K$ je $\frac{1}{2}(y_i + y_j) \in K$ a tak dostáváme

$$\|y_i - y_j\|^2 \leq 2\|x - y_i\|^2 + 2\|x - y_j\|^2 - 4\Delta^2 \longrightarrow 0.$$

Posloupnost je tudíž Cauchyovská a tak existuje $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $y_i \longrightarrow \hat{x}$.
Z uzavřenosti množiny $K$ je $\hat{x} \in K$ a ze spojitosti normy $\|x - \hat{x}\| = \Delta$.

2. Jednoznačnost.

   Nechť $x^*, x^{**} \in K$ a $\|x - x^*\| = \|x - x^{**}\| = \Delta$.

   Obdobně jako v předchozí části důkazu dostaneme odhad

$$\|x^* - x^{**}\|^2 = 2\|x - x^*\|^2 + 2\|x - x^{**}\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(x^* + x^{**})\right\|^2 \leq$$

$$\leq 2\|x - x^*\|^2 + 2\|x - x^{**}\|^2 - 4\Delta^2 = 0.$$

   Tudíž $x^* = x^{**}$.

3. Nutná a postačující podmínka.

   (a) Nechť $\hat{x} \in K$ je takové, že $\|x - \hat{x}\| = \Delta$, a předpokládejme, že podmínka (3.1) neplatí.
   Pak existuje $y \in K$ takové, že $(x - \hat{x})^\top (y - \hat{x}) > 0$.
   Pro $\alpha \in (0, 1)$ označíme $z(\alpha) = (1 - \alpha)\hat{x} + \alpha y$. Pak funkce

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \|x - z(\alpha)\|^2 = \|(1-\alpha)(x - \hat{x}) + \alpha(x - y)\|^2 = \\ &= (1-\alpha)^2\|x - \hat{x}\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)(x - \hat{x})^\top (x - y) + \alpha^2\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

   splňuje $f(0) = \Delta^2$ a $f'(0) = -2\|x - \hat{x}\|^2 + 2(x - \hat{x})^\top (x - y) = 2(x - \hat{x})^\top (\hat{x} - y) < 0$, neboť $f'(\alpha) = -2(1-\alpha)\|x - \hat{x}\|^2 + 2(1 - 2\alpha)(x - \hat{x})^\top (x - y) + 2\alpha\|x - y\|^2$.
   Tudíž v nějakém pravém okolí nuly je $f(\alpha) < \Delta^2$, to je ale spor s definicí konstanty $\Delta$.

   (b) Nyní nechť je podmínka (3.1) splněna pro $\hat{x} \in K$ a $y \in K$. Pak

$$\|x - y\|^2 = \|(x - \hat{x}) + (\hat{x} - y)\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 + 2(x - \hat{x})^\top (\hat{x} - y) + \|\hat{x} - y\|^2 \geq \|x - \hat{x}\|^2.$$

   Tudíž $\|x - \hat{x}\| = \Delta$.

Q.E.D.

Podmínka (3.1) má geometrickou interpretaci. Znamená, že úhel mezi $x - \hat{x}$ a $y - \hat{x}$ není ostrý pro žádné $y \in K$.

**Věta 3.3** (oddělitelnost bodu a konvexní množiny): *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ je konvexní množina a $x \notin \operatorname{clo}(K)$. Pak existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že $\inf\left\{\gamma^\top y : y \in K\right\} > \gamma^\top x$.*

*Lze volit například $\gamma = \hat{x} - x$, kde $\hat{x}$ je projekce bodu $x$ na množinu $K$. Pro tuto speciální volbu dostáváme silnější výsledek* $\inf\left\{\gamma^\top y : y \in K\right\} = \min\left\{\gamma^\top y : y \in \operatorname{clo}(K)\right\} = \gamma^\top \hat{x} > \gamma^\top x$.

**Důkaz:** Podle věty 3.2 existuje jednoznačně určený bod $\hat{x} \in \operatorname{clo}(K)$, který je projekcí bodu $x$ na $K$, a platí (3.1), tj.

$$(x - \hat{x})^\top (y - \hat{x}) \leq 0 \text{ pro každé } y \in \operatorname{clo}(K).$$

Položme $\gamma = \hat{x} - x$. Pak

$$\gamma^\top (y - \hat{x}) \geq 0 \text{ pro každé } y \in K,$$
$$\gamma^\top (\hat{x} - x) = \|\gamma\|^2 = (\hat{x} - x)^\top (\hat{x} - x) > 0 \text{ neboť } x \notin \text{clo}(K).$$

Tudíž

$$\gamma^\top y \geq \gamma^\top \hat{x} > \gamma^\top x \text{ pro každé } y \in K.$$

Q.E.D.

Geometricky věta 3.3 říká, že existuje uzavřený poloprostor $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma^\top x \geq c\right\}$ tak, že $K \subset H$ a bod $y$ má od $H$ kladnou vzdálenost.

**Věta 3.4** (o opěrné nadrovině): *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ je konvexní množina a $y \in \partial(K)$. Pak existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že $\inf\left\{\gamma^\top x : x \in K\right\} \geq \gamma^\top y$.*

**Důkaz:** $y \in \partial(K)$, proto existuje posloupnost bodů $y_k \notin \text{clo}(K)$, $k \in \mathbb{N}$ taková, že $y_k \to y$.
Pro každé $k \in \mathbb{N}$ podle věty 3.3 existuje $\gamma_k \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_k \neq \mathbf{0}$ takové, že $\inf\left\{\gamma_k^\top x : x \in K\right\} > \gamma_k^\top y$.
Po znormování dostáváme, že všechna $\beta_k = \frac{\gamma_k}{\|\gamma_k\|}$, $k \in \mathbb{N}$ leží v kompaktní sféře $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.
Dokážeme tedy vybrat konvergentní podposloupnost $\beta_{k_m} \to \gamma$ při $m \to +\infty$.
Potom pro každé $x \in K$ dostáváme:

$$\gamma^\top x = \lim_{m \to +\infty} \beta_{k_m}^\top x \geq \lim_{m \to +\infty} \beta_{k_m}^\top y = \gamma^\top y.$$

Tím je věta dokázána.

Q.E.D.

Geometricky věta 3.4 říká, že existuje nadrovina $L = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma^\top x = c\right\}$ a jí určený uzavřený poloprostor $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma^\top x \geq c\right\}$ tak, že $y \in L \cap \text{clo}(K)$ a $K \subset H$. Takovéto nadrovině říkáme opěrná nadrovina množiny $K$ v bodě $y \in \partial(K)$.

Věta 3.3 umožňuje charakterizovat uzavřené konvexní množiny.

**Věta 3.5** (reprezentace uzavřené konvexní množiny): *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Pak $K$ je uzavřená konvexní množina tehdy a jen tehdy, když je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují.*

**Důkaz:** Uzavřené konvexní poloprostory jsou uzavřené konvexní množiny. Proto i jejich průnik je uzavřená konvexní množina. Stačí proto ukázat pouze opačnou implikaci.

Předpokládejme, že $K$ je uzavřená konvexní množina.
Označme $\mathcal{M} = \{H : H \subset \mathbb{R}^n \text{ uzavřený poloprostor}, K \subset H\}$ a položme $C = \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H$.

1. Evidentně $C \supset K$.
2. Vezměme $y \notin K$.
   Podle věty 3.3 existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ takový, že $\inf\left\{\gamma^\top x : x \in K\right\} > \gamma^\top y$.
   Označme $\Delta := \inf\left\{\gamma^\top x : x \in K\right\}$.
   Pak $H := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma^\top x \geq \Delta\right\}$ je uzavřený poloprostor s vlastnostmi $K \subset H$ a $y \notin H$.
   Tudíž $y \notin C$ a proto $C \subset K$.

Q.E.D.

Lepší využití věty 3.3 umožňuje tuto charakterizaci zlepšit.

**Věta 3.6** (reprezentace uzavřené konvexní množiny 2): *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Pak $K$ je uzavřená konvexní množina tehdy a jen tehdy, když je průnikem všech svých opěrných uzavřených poloprostorů.*

**Důkaz:** Stejně jako v důkaze předchozí věty stačí ukázat pouze druhou implikaci. Předpokládejme proto, že $K$ je uzavřená konvexní množina.
Označme $\mathcal{M} = \{H : H \subset \mathbb{R}^n$ opěrný uzavřený poloprostor množiny $K\}$ a položme $C = \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H$.

1. Evidentně $C \supset K$.
2. Vezměme $y \notin K$.

   Položme $\gamma = \hat{y} - y$, kde $\hat{y}$ je projekce bodu $y$ na množinu $K$.

   Podle věty 3.3 platí $\min\left\{\gamma^\top x \,:\, x \in K\right\} = \gamma^\top \hat{y} > \gamma^\top y$.

   Pak $H := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \gamma^\top x \geq \gamma^\top \hat{y}\right\}$ je opěrný poloprostor množiny $K$ a $y \notin H$.

   Tudíž $y \notin C$ a proto $C \subset K$.

Tím jsme se přesvědčili, že $K = C$.

Q.E.D.

Věty o oddělitelnosti mají své důsledky také pro konvexní funkce.

**Věta 3.7**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak $\partial f(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \operatorname{rint}(\mathsf{D})$.*

**Důkaz:** Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\operatorname{int}(\mathsf{D}) \neq \emptyset$.
Vezměme $x \in \operatorname{int}(\mathsf{D})$.
Pak $(x, f(x)) \in \partial(\mathsf{epi}(f))$ a podle věty 3.4 existují $\alpha \in \mathbb{R}^n$ a $\beta \in \mathbb{R}$ taková, že $\binom{\alpha}{\beta} \neq \mathbf{0}$ a pro všechna $(y, \eta) \in \mathsf{epi}(f)$ platí

$$\alpha^\top y + \beta\eta \geq \alpha^\top x + \beta f(x).$$

Číslo $\eta$ může být libovolně velké. Proto nutně $\beta \geq 0$.
Uvažujeme $x \in \operatorname{int}(\mathsf{D})$ a tak $\beta > 0$.

- Je tomu tak proto, že existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(x) \subset \mathsf{D}$.

  Kdyby tedy $\beta = 0$, pak by muselo pro všechna $y \in \mathsf{Dom}(f)$ platit $\alpha^\top y \geq \alpha^\top x$.

  Speciálně by pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| < \delta$ platilo $\alpha^\top(x + \xi) \geq \alpha^\top x$.

  To znamená $\alpha^\top \xi \geq 0$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| < \delta$.

  Tuto podmínku však lze splnit pouze pokud $\alpha = \mathbf{0}$.

  Tím dostáváme $\binom{\alpha}{\beta} = \mathbf{0}$, což je spor s tím, že víme, že tento vektor je nenulový.

Tudíž pro všechna $(y, \eta) \in \mathsf{epi}\,(f)$ platí

$$\frac{1}{\beta}\,\alpha^\top y + \eta \geq \frac{1}{\beta}\,\alpha^\top x + f\,(x)\,.$$

Odtud pro všechna $y \in \mathsf{Dom}\,(f)$ platí

$$f\,(y) - f\,(x) \geq -\frac{1}{\beta}\,\alpha^\top (y - x).$$

Našli jsme $-\frac{1}{\beta}\,\alpha \in \partial f\,(x)$. Tím je věta dokázána.

Q.E.D.

Pro spojitou funkci dostáváme novou charakterizaci konvexní funkce.

**Věta 3.8**: *Nechť $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak $f$ je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když $\partial f\,(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \mathrm{rint}\,(\mathsf{D})$.*

**Důkaz:** Podle věty 3.7 je podmínka pro konvexní funkci splněna. Stačí proto ukázat pouze opačnou implikaci.

1. Vezměme $x, y \in \mathrm{rint}\,(\mathsf{D})$ a $0 < \lambda < 1$.
   Potom také $z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathrm{rint}\,(\mathsf{D})$, neboť $\mathsf{D}$ je konvexní množina.
   Vezměme $\alpha \in \partial f\,(z)$, které podle podmínky existuje.
   Z definice subgradientu platí

$$\begin{aligned} f\,(x) - f(z) &\geq \alpha^\top (x - z), \\ f\,(y) - f(z) &\geq \alpha^\top (y - z). \end{aligned}$$

   Odtud

$$\lambda(f\,(x) - f(z)) + (1 - \lambda)(f\,(y) - f(z)) \geq \lambda\alpha^\top (x - z) + (1 - \lambda)\alpha^\top (y - z).$$

   Úpravou výrazů dostaneme

$$\lambda f\,(x) + (1 - \lambda) f\,(y) - f(z) \geq \alpha^\top (\lambda x + (1 - \lambda) y - z) = 0.$$

   Ukázali jsme, že

$$\lambda f\,(x) + (1 - \lambda) f\,(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

2. Vezměme $x, y \in \mathsf{D}$ a $0 < \lambda < 1$.
   Podle lemmatu 1.14 je $\mathsf{D} \subset \mathrm{clo}\,(\mathrm{rint}\,(\mathsf{D}))$.
   Existují proto posloupnosti $x_k, y_k \in \mathrm{rint}\,(\mathsf{D})$ takové, že $x_k \to x$ a $y_k \to y$.
   Víme již, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda f(x_k) + (1 - \lambda) f(y_k) \geq f(\lambda x_k + (1 - \lambda) y_k).$$

   Limitním přechodem a s využitím spojitosti funkce $f$ na $\mathsf{D}$ dostáváme

$$\lambda f\,(x) + (1 - \lambda) f\,(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

Funkce $f$ je tedy konvexní.

Q.E.D.

Věty 3.3 a 3.4 řeší plně problém oddělitelnosti bodu a konvexní množiny. Dále se budeme zabývat oddělitelností dvou konvexních množin. Uvědomme si, že v principu existují dvě možnosti, jak mohou být dvě množiny odděleny nadrovinou.

**Definice 3.9** *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$.*

*i) $A$ a $B$ jsou neostře oddělitelné, jestliže existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že*

$$\gamma^\top a \geq \gamma^\top b \text{ pro každé } a \in A\,,\ b \in B. \tag{3.2}$$

*ii) $A$ a $B$ jsou ostře oddělitelné, jestliže existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ a $c, d \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$\gamma^\top a \geq c > d \geq \gamma^\top b \text{ pro každé } a \in A\,,\ b \in B. \tag{3.3}$$

Mezi zavedenými oddělitelnostmi je jednoduchý vztah.

**Lemma 3.10** *Jsou-li dvě množiny ostře oddělitelné, pak jsou neostře oddělitelné.*

**Důkaz:** Implikace je evidentní.

Q.E.D.

Ostrou i neostrou oddělitelnost lze ekvivalentně vyjádřit.

**Lemma 3.11** *Množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou neostře oddělitelné tehdy a jen tehdy, když existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že*

$$\inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\} \geq \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}. \tag{3.4}$$

**Důkaz:** Vlastnost (3.4) je pouze jiným zápisem (3.2).

Q.E.D.

**Lemma 3.12** *Množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou ostře oddělitelné tehdy a jen tehdy, když existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že*

$$\inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\} > \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}. \tag{3.5}$$

**Důkaz:** Vlastnost (3.3) evidentně implikuje (3.5).
Platí-li (3.5), pak stačí položit $c := \inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\}$, $d := \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}$ a získáme (3.3).

Q.E.D.

Oddělitelnost množin a oddělitelnost jejich konvexních obalů dopadne stejně.

**Lemma 3.13** *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Pak platí:*

- *Množiny $A$, $B$ jsou neostře oddělitelné tehdy a jen tehdy, jsou-li neostře oddělitelné* $\mathrm{conv}\,(A)$, $\mathrm{conv}\,(B)$.

- *Množiny $A$, $B$ jsou ostře oddělitelné tehdy a jen tehdy, jsou-li ostře oddělitelné* $\operatorname{conv}(A)$, $\operatorname{conv}(B)$.

**Důkaz:** Ekvivalence jsou evidentní. Stačí si pouze uvědomit, že pro každé $\gamma \in \mathbb{R}^n$ a $C \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\inf\left\{\gamma^\top c \,:\, c \in C\right\} = \inf\left\{\gamma^\top c \,:\, c \in \operatorname{conv}(C)\right\}.$$

Q.E.D.

Pokud jsou množiny disjunktní, uzavřené konvexní a jedna z nich je kompaktní, pak je lze ostře oddělit.

**Věta 3.14** (ostrá oddělitelnost konvexních množin): *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina a $B \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní konvexní množina. Když $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ a $A \cap B = \emptyset$, pak je lze ostře oddělit.*

**Důkaz:** Položme

$$K = A - B = \{a - b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

1. Víme, že množina $K$ je neprázdná a konvexní.
2. $\mathbf{0} \notin K$, jinak by totiž muselo být $A \cap B \neq \emptyset$.
3. Zbývá ukázat uzavřenost množiny $K$.

   Nechť $y_i \in K$, $i \in \mathbb{N}$ jsou takové, že $y_i \to \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ při $i \to +\infty$.

   Z definice množiny $K$ víme, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ existují $a_i \in A$, $b_i \in B$ takové, že $y_i = a_i - b_i$.

   Z kompaktnosti množiny $B$ lze vybrat podposloupnost $i_k$, $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $b_{i_k} \to \hat{b} \in B$ při $k \to +\infty$.

   Pak však také $a_{i_k} = y_{i_k} + b_{i_k} \to \hat{a} = \hat{y} + \hat{b} \in \mathbb{R}^n$ při $k \to +\infty$. Množina $A$ je uzavřená a proto $\hat{a} \in A$.

   Zjistili jsme, že $\hat{y} = \hat{a} - \hat{b} \in K$. Tím jsme ověřili, že $K$ je uzavřená množina.

Pro množinu $K$ a bod $\mathbf{0}$ jsou splněny předpoklady věty 3.3. Lze je tedy ostře oddělit.
Proto existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že $\inf\left\{\gamma^\top x \,:\, x \in K\right\} > \gamma^\top \mathbf{0} = 0$.
Vraťme se nyní k definici množiny $K$, proto platí

$$0 < \inf\left\{\gamma^\top x \,:\, x \in K\right\} = \inf\left\{\gamma^\top (a-b) \,:\, a \in A,\ b \in B\right\} = \inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\} - \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}.$$

Odtud $\inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\} > \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}$, což je podle lemmatu 3.12 ekvivalentní s ostrou oddělitelností množin $A$ a $B$.

Q.E.D.

Pokud jsou množiny disjunktní a konvexní, pak je umíme oddělit pouze neostře.

**Věta 3.15** (neostrá oddělitelnost konvexních množin): *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny. Když $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ a $\operatorname{rint}(A) \cap \operatorname{rint}(B) = \emptyset$, pak je lze neostře oddělit.*

**Důkaz:** Položme

$$K = A - B = \{a - b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

1. Množina $K$ je evidentně neprázdná a konvexní.

2. Ukážeme, že $\mathbf{0} \notin \operatorname{int}(K)$.

   Předpokládejme, že $\mathbf{0} \in \operatorname{int}(K)$.

   Pak existuje $\bar{x} \in A \cap B$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset K$.

   Množiny jsou konvexní a neprázdné a tak existují body $a^1 \in \operatorname{rint}(A)$ a $b^1 \in \operatorname{rint}(B)$ tak, že $\left\|a^1 - \bar{x}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left\|b^1 - \bar{x}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Pak $a^1 - b^1 \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset K$ a také $b^1 - a^1 \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset K$.

   Pak existují $a^2 \in A$ a $b^2 \in B$ tak, že $a^2 - b^2 = b^1 - a^1$.

   Potom však bod $\frac{a^1+a^2}{2} = \frac{b^1+b^2}{2} \in \operatorname{rint}(A) \cap \operatorname{rint}(B)$, což je spor s předpokladem, že průnik relativních vnitřků uvažovaných množin je prázdný.

Tudíž množinu $K$ a bod $\mathbf{0}$ lze neostře oddělit; plyne to z věty 3.3, když $\mathbf{0} \notin \operatorname{clo}(K)$, případně z věty 3.4, když $\mathbf{0} \in \partial(K)$.
Proto existuje $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}$ tak, že $\inf\left\{\gamma^\top x \,:\, x \in K\right\} \geq 0$.
Vraťme se nyní k definici množiny $K$, proto platí

$$0 \leq \inf\left\{\gamma^\top x \,:\, x \in K\right\} = \inf\left\{\gamma^\top (a-b) \,:\, a \in A\,,\ b \in B\right\} = \inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\} - \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}.$$

Odtud $\inf\left\{\gamma^\top a \,:\, a \in A\right\} \geq \sup\left\{\gamma^\top b \,:\, b \in B\right\}$, což je podle lemmatu 3.11 ekvivalentní s neostrou oddělitelností množin $A$ a $B$.

Q.E.D.

# Index

# Literatura


[1] Bazara, M.S.; Sherali, H.D.; Shetty, C.M.: *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* 2nd edition, Wiley, New York, 1993.

[2] Dupačová, J.: *Lineární programování.* SPNP, Praha, 1982.

[3] Plesník, J.; Dupačová, J.; Vlach, M.: Lineárne programovanie, Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Habala, P.; Hájek, P.; Zizler, V.: *Introduction to Banach Spaces I-II.* MatfyzPress, Praha, 1996.

[5] Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti.* Skripta MFF UK, Praha, 1998.

[6] Rockafellar, T.: *Convex Analysis.*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[7] Rockafellar, T.; Wets, R. J.-B.: *Variational Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.