

Zkouškové příklady – teorie

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo sestrojte protipříklad):

Posloupnosti

- Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.
 - Sestrojte a_n a b_n , aby $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
 - Lze sestrojít a_n a b_n , které splňují (a) a navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$?
 - Lze sestrojít a_n a b_n , které splňují (a) a navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$?
- Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.
 - Hromadné hodnoty $H(\{a_n\}) \subset [-3, 3]$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty \Rightarrow \{a_n\}$ je zdola omezená.

Funkce a derivace

- Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce mající v ∞ asymptotu $ax + b$ a v $-\infty$ asymptotu $cx + d$.
 - Musí být $c \leq a$?
 - Musí platit $f(x) \geq ax + b$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$?
- Nechť $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je posloupnost reálných funkcí (pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme jednu funkci) a nechť pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
 - Nechť f_n jsou uniformně omezené, tedy $\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1] : |f_n(x)| \leq K$. Musí být f omezená funkce?
 - Nechť jsou všechny f_n spojité funkce. Musí být f spojitá funkce?
- Nechť $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jsou spojité funkce.
 - Nechť $f(0) = g(0) = 0$ a $f(1) = g(1) = 1$. Musí existovat $x \in (0, 1)$ tak, že $f(x) = g(x)$?
 - Nechť $f(0) = g(1) = 0$ a $f(1) = g(0) = 1$. Musí existovat $x \in (0, 1)$ tak, že $f(x) = g(x)$?
- Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.
 - $\exists f'(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \delta > 0$, že f je omezená na $(-\delta, \delta)$?
 - $\exists f'(0) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \exists \delta > 0$, že f je omezená na $(-\delta, \delta)$?

5. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Definujme symetrickou limitu funkce jako $s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
- (b) $s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
6. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a f' je spojitá na \mathbb{R} .
- (a) f má asymptotu $ax + b$ v ∞ a existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. Hint: l'Hospital
- (b) f má asymptotu $ax + b$ v $\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \Rightarrow$ existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
7. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.
- (a) $\exists K > 0 \forall x \in [-1, 1] - Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2 \Rightarrow$ existuje $f'(0)$.
- (b) Existuje $f'(0) \Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in [-1, 1] - Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2$
8. (a) Necht existují $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = B \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Existuje $\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{A, B\}$.
- (b) Necht existují $\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \min\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Existují $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = b$.
9. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a necht existuje f' na \mathbb{R} .
- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} f'(c) = 0$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} f'(c) = 0$.
10. (a) Necht $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce. Dokažte, že pak i funkce $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}, x \in \mathbb{R}$ je spojitá funkce.
- (b) Uvažujme funkci $f_a(x) = x^3 + ax, x \in \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Dokažte, že funkce $x \mapsto \operatorname{sgn}(f_a(x)), x \in \mathbb{R}$, není spojitá na \mathbb{R} .
11. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí některé z následujících tvrzení:
- (a) Platí $f(\mathbb{R}) = \{0\}$.
- (b) Funkce f je spojitá na \mathbb{R} .
- (c) Funkce f je omezená na \mathbb{R} .
- (d) Funkce f je omezená na každém omezeném intervalu v \mathbb{R} .
12. Rozhodněte, zda existuje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitou druhou derivací na \mathbb{R} , která není ani konvexní ani konkávní na žádném intervalu v \mathbb{R} .
13. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.
- (a) Pokud existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.
- (b) Pokud existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) Pokud f je spojitá na \mathbb{R} a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
14. (a) Dokažte, že existuje funkce $f[0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$, existuje $f'_+(0)$ a neplatí rovnost $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$.
- (b) Dokažte, že existuje funkce $f[0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že existuje derivace $f'_+(0)$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (0, 1)$ a neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$.

Taylor

1. (a) $f(x) = xo(x) \text{ u } 0 \Rightarrow f(x) = o(x^2) \text{ u } 0.$
- (b) $f(x) = o(x^2) \text{ u } 0 \Rightarrow f(x) = xo(x) \text{ u } 0.$
- (c) $\exists K > 0 \forall x \in [-1, 1] |f(x)| \leq Kx^2 \Rightarrow f(x) = o(x^2) \text{ u } 0$
- (d) $f(x) = o(x^2) \text{ u } 0 \Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in [-1, 1] |f(x)| \leq Kx^2$