

Goniometrické substituce

Teorie

Bud' $R(\cdot, \cdot)$ racionální funkce dvou proměnných.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \sin x$. Pak $dt = \cos x dx$.
2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \cos x$. Pak $dt = -\sin x dx$.
3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2} \quad (1)$$

4. Vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \quad (2)$$

5. Místo (3) lze užít i $t = \cot x$, je-li $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{-1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2} \quad (3)$$

6. Místo (4) lze užít i $t = \cot \frac{x}{2}$, je-li $x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{-2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = -\frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \quad (4)$$