

Stejnomořná spojitost

Definice 1. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je *stejnomořně spojitá* na I , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Definice 2. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je *spojitá* na I , jestliže platí

$$\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in I: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnomořně spojitá, pak je na I spojitá.

Necht' $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnomořné spojitosti pro ε . Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0 , respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I .

Věta 3 (spojitost a stejnomořná spojitost). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejnomořně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz. Necht' f není stejnomořně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy $\varepsilon > 0$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x . Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}). \quad (1)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|. \quad (2)$$

Díky (1) platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|) = 0.$$

Odtud a z (2) dostáváme pomocí věty o dvou strážnících

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ však platí $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, což je spor. □

Věta 4 (Omezená derivace a stejnoměrná spojitost). Necht $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a necht funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje:

1. f je spojitá na I ,
2. f je diferencovatelná v každém bodě $x \in I$,
3. derivace f' je omezená na I , tj. existuje $M > 0$ takové, že $|f'(x)| \leq M$ pro všechna $x \in I$.

Pak f je stejnoměrně spojitá na I .

Důkaz. Necht $x, y \in I$, $x < y$. Pak z Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $c \in (x, y)$ takové, že

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Odtud dostáváme odhad

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|.$$

Tento odhad platí pro všechna $x, y \in I$. Proto pro každé $\varepsilon > 0$ zvolíme

$$\delta := \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pak pro všechna $x, y \in I$ s $|x - y| < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

□

Příklady

1. Necht $I = (-\infty, \infty)$ a $f(x) = x$, $x \in I$. Dokažte, že f je stejnoměrně spojitá na I .

Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon$. Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - y| < \delta$, platí

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá na $(-\infty, \infty)$.

2. Necht $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I , ale není stejnoměrně spojitá na I .

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$.

Tedy existuje $\varepsilon := 1$ takové, že pro každé $\delta_n > 0$ a existuje $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

3. Necht $I = [0, 4]$ a $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je stejnoměrně spojitá na I .

Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon^2$. Pak pro každé $x, y \in [0, 4]$ takové, že $|x - y| < \delta$, platí

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{0 + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{|y - x|}} = \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá na $[0, 4]$.

Pozn.: Lze ukázat rovnou z Věty 3.

4. Necht' $I = [0, 1]$ a $f(x) = x^2$, $x \in I$. Dokažte, že f je stejnoměrně spojitá na I .

Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon$. Pak pro každé $x, y \in [0, 1]$ takové, že $|x - y| < \delta$, platí

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq (1 + 1)|x - y| < 2\delta = 2\varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$.

Pozn.: Lze ukázat rovnou z Věty 3.

5. Necht' $I = \mathbb{R}$ a $f(x) = x^2$, $x \in I$. Dokažte, že f není stejnoměrně spojitá na I .

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = n$ a $y_n = n + \frac{1}{n}$. Pak $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, ale

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = \left| -2 - \frac{1}{n^2} \right| \geq 2.$$

Tedy existuje $\varepsilon := 2$ takové, že pro každé $\delta_n > 0$ a existuje $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Tedy f není stejnoměrně spojitá na \mathbb{R} .

6. Necht' $I = [1, \infty)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je stejnoměrně spojitá na I .

Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon$. Pak pro každé $x, y \in [1, \infty)$ takové, že $|x - y| < \delta$, platí

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|xy|} \leq \frac{|x - y|}{1 \cdot 1} < \delta = \varepsilon,$$

protože $x, y \geq 1$, tedy $|xy| \geq 1$. Tedy f je stejnoměrně spojitá na $[1, \infty)$.

7. Necht' $I = (0, 1)$ a $f(x) = \log x$, $x \in I$. Dokažte, že f není stejnoměrně spojitá na I .

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{2n}$. Pak $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$, ale

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\log(1/n) - \log(1/(2n))| = |\log(2)| = \log 2.$$

Tedy existuje $\varepsilon := \log 2$ takové, že pro každé $\delta_n > 0$ a existuje $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Tedy f není stejnoměrně spojitá na $(0, 1)$.

8. Necht' $I = [1, \infty)$ a $f(x) = \log x$, $x \in I$. Dokažte, že f je stejnoměrně spojitá na I .

Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon$. Necht' $x, y \in [1, \infty)$ a $|x - y| < \delta$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x > y$. Pak

$$|f(x) - f(y)| = \log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(1 + \frac{x - y}{y}\right).$$

Protože $y \geq 1$, platí

$$0 \leq \frac{x - y}{y} \leq x - y.$$

Použijeme nerovnost $\log(1 + t) \leq t$ pro $t \geq 0$ a dostáváme

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{x - y}{y} \leq x - y = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá na $[1, \infty)$.

9. Necht' $I = \mathbb{R}$ a $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in I$. Doka'zte, že f není stejnoměrně spojitá na I .

Pro $n \in \mathbb{N}$ polo'zme

$$x_n = \sqrt{2\pi n}, \quad y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}.$$

Pak $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ a

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| &= \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi n} \\ &= \frac{(2\pi n + \frac{\pi}{2}) - 2\pi n}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi n}} \\ &= \frac{\pi/2}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dále platí

$$f(x_n) = \sin((\sqrt{2\pi n})^2) = \sin(2\pi n) = 0, \quad f(y_n) = \sin((\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}})^2) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Tedy

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1.$$

Tedy f není stejnoměrně spojitá na \mathbb{R} .

Shrnutí

- Poznámka 5.** 1. Spojitá funkce f na uzavřeném omezeném intervalu (tedy f je spojitá) je vždy stejnoměrně spojitá. Plyne z Věty 3.
2. Neomezená funkce může být stejnoměrně spojitá (x na \mathbb{R}) i nemusí (x^2 na \mathbb{R}).
3. Spojitá omezená funkce může být stejnoměrně spojitá (x^2 na $[0, 1]$), i nemusí ($\sin x^2$ na \mathbb{R}).
4. Má-li funkce omezenou derivaci, je vždy stejnoměrně spojitá. Plyne z Věty 4.
5. Má-li funkce neomezenou derivaci, může (\sqrt{x} na $[0, 4]$) i nemusí (x^2 na \mathbb{R}) být stejnoměrně spojitá.

Funkce	Interval	Stejnomořně spojitá
$f(x) = x$	\mathbb{R}	ano
$f(x) = x^2$	$[0, 1]$	ano
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	ne
$f(x) = 1/x$	$[1, \infty)$	ano
$f(x) = 1/x$	$(0, 1)$	ne
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, 4]$	ano
$f(x) = \log x$	$(0, 1)$	ne
$f(x) = \log x$	$[1, \infty)$	ano
$f(x) = \sin(x^2)$	\mathbb{R}	ne

Funkce	Funkce	Interval	Stejnomořně spojitá
$f(x) = x, \mathbb{R}$	neomezená	neomezený	ano
$f(x) = x^2, [0, 1]$	omezená	omezený	ano
$f(x) = x^2, \mathbb{R}$	neomezená	neomezený	ne
$f(x) = 1/x, [1, \infty)$	omezená	neomezený	ano
$f(x) = 1/x, (0, 1)$	neomezená	omezený	ne
$f(x) = \sqrt{x}, [0, 4]$	omezená	omezený	ano
$f(x) = \log x, (0, 1)$	neomezená	omezený	ne
$f(x) = \log x, [1, \infty)$	neomezená	neomezený	ano
$f(x) = \sin(x^2), \mathbb{R}$	omezená	neomezený	ne