

KALKULUS 1, LETNÍ SEMESTR 2025/26

INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

ZÁPOČET

K získání zápočtu je potřeba

- zúčastnit se alespoň 50% cvičení (cca 14 cvičení z 28) a zároveň
- úspěšně vypracovat tři domácí úkoly - každý bude po 10 bodech a je třeba získat alespoň 70% bodů = 21 bodů.

ZKOUŠKA

Zkouška sestává z písemné a ústní části.

Písemná část. V letním zkouškovém období budou vypsány čtyři termíny písemné části zkoušky, podrobnější informace o čase a místě konání těchto zkoušek lze nalézt v SISu. V případě zájmu bude jeden termín vypsán v září.

Písemná část bude obsahovat 4 příklady na následující témata:

- výpočet limity pomocí Taylorova polynomu (12 bodů);
- určení primitivní funkce (13 bodů);
- vyšetření konvergence Newtonova integrálu / aplikace určitého integrálu (12 bodů);
- implicitní funkce / vyšetření extrémů funkce více proměnných (13 bodů).

Čas k vypracování písemné části je 120 minut. Jsou povoleny libovolné ručně psané i tištěné materiály. Zakázána je veškerá technika.

K úspěšnému složení písemné části je třeba získat alespoň 25 bodů.

Ústní část. Ústní zkoušky se typicky koná další pracovní den po písemné části. Nejsou povoleny žádné materiály ani technika.

Bude obsahovat otázky podle následujícího klíče:

- definice pojmu (5 bodů);
- znění věty (5 bodů);
- formulace a důkaz lehké věty (5+10 bodů);
- formulace a důkaz těžké věty (5+20 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba získat alespoň 25 bodů.

V případě neúspěchu u ústní části se v příštím termínu opakuje pouze ústní část.

Data ústní části.

- 26. 5. K8 9:00 (nebo později dle účasti, info přijde mailem po opravení písemky)
- 2. 6. K8 9:00 (nebo později dle účasti, info přijde mailem po opravení písemky)
- 9. 6. K8 9:00 (nebo později dle účasti, info přijde mailem po opravení písemky)
- 16. 6. K8 9:00 (nebo později dle účasti, info přijde mailem po opravení písemky)
- 23. 6. K4 9:00 (nebo později dle účasti, info přijde mailem po opravení písemky)

Celkové hodnocení zkoušky. Celkovému hodnocení odpovídají zhruba tyto body

- 50 - 69 dobře;
- 70 - 84 velmi dobře;
- 85 - 100 výborně.

Vzor početní části zkoušky.

(1) Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - 2\sin \frac{x}{2}}$$

(2) Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$$

na největším možném intervalu.

(3) Vyšetřete **absolutní** konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^{\infty} \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx$$

(4) Uvažujte funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x, y, z) = x - y + 2z$$

a množinu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$

Určete, zda funkce f na množině M nabývá svých extrémů, a nalezněte je.

Místo příkladu (3) může být i příklady typu: Spočtěte délku křivky parametrizované

$$\varphi(t) = [2t^2 + 1, 2t^2 - 1, t^3], t \in [0, 2].$$

Místo příkladu (4) může být i příklady typu: Ukažte, že daná rovnice určuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zdanou funkci proměnné x . Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě \bar{x} .

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, \quad [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0].$$

Vzor teoretické části zkoušky

- (1) (5 bodů) Napište definici: otevřená množina, vnitřek množiny.
- (2) (5 bodů) Zformulujte větu: první věta o substituci neurčitého integrálu.
- (3) (5+10 bodů) Zformulujte a dokažte větu: nutná podmínka existence lokálního extrému.
- (4) (5+20 bodů) Zformulujte a dokažte větu: Lagrangeův tvar zbytku.

Seznam definic a vět

Definice:

Taylorův polynom funkce f v bodě a řádu n .
 malé o (funkce f je v bodě a je malé o od g)
 Taylorova řada funkce f o středu a , Maclaurinova řada
 primitivní funkce
 Polynom dvou proměnných, Racionální funkce dvou proměnných
 dělení intervalu $[a, b]$
 jemnější dělení
 horní Riemannův součet, dolní Riemannův součet, horní Riemannův integrál, dolní Rie-
 mannův integrál, Riemannův integrál
 stejnoměrně spojitá funkce
 Newtonův integrál
 Křivka, Geometrický obraz křivky
 Délka křivky
 Metrika, metrický prostor
 Normovaný lineární prostor
 Indukovaná metrika
 otevřená koule
 Diametr prostoru, Diametr množiny
 omezený metrický prostor, omezená množina
 konvergentní posloupnost v metrickém prostoru, limita posloupnosti v metrickém prostoru
 vybraná posloupnost v metrickém prostoru
 vnitřní bod, vnitřek množiny
 otevřená množina
 uzavřená množina
 hraniční bod, hranice, uzávěr
 hromadný bod, derivace množiny
 izolovaný bod množiny
 zobrazení spojitě v bodě a vzhledem k množině M (v metrickém prostoru)
 zobrazení spojitě v bodě a (v metrickém prostoru)
 zobrazení spojitě na množině M (v metrickém prostoru)
 spojitě zobrazení (v metrickém prostoru)
 lipschitzovské zobrazení
 limita f v bodě a vzhledem k množině A
 parciální derivace funkce f v bodě \vec{a} podle i -té proměnné
 totální diferenciál funkce f v bodě \vec{a}
 derivace funkce f v bodě \vec{a} podle vektoru \vec{v}
 gradient funkce f
 Jacobiho matice v bodě a , jacobíán
 funkce třídy C^k
 Hessova matice

maximum a minimum funkce z metrického prostoru, lokální maximum a minimum, extrémny

Věty:

Peanův tvar zbytku, Věta 1.1, Dk T

aproximace polynomu, Lemma, Dk

jednoznačnost Taylorova polynomu, Věta 1.2, Dk

Lagrangeův tvar zbytku, Věta 1.3, Dk T

aritmetika malého o , Věta 1.4

malé o a skládání, Věta 1.5

Taylorova řada funkce \exp , Věta 1.6, Dk T

jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu, Věta 2.1, Dk

spojitost a existence primitivní funkce, Věta 2.2, Dk

linearita primitivní funkce, Věta 2.3, Dk

integrace per partes, Věta 2.4, Dk

Darboux, Věta 2.5

první věta o substituci, Věta 2.6, Dk

druhá věta o substituci, Věta 2.7, Dk T

~~rozklad na parciální zlomky, Věta 2.8~~

o lepení, Věta 2.9

aproximace Riemannova integrálu, Věta 2.10

kritérium existence Riemannova integrálu, Věta 2.11

spojitost a stejnoměrná spojitost, Věta 2.12

spojitost a riemannovská integrovatelnost, Věta 2.13, Dk T

monotonie a riemannovská integrovatelnost, Věta 2.14, Dk T

linearita Riemannova integrálu, Věta 2.15

Riemannův integrál a uspořádání, Věta 2.16, Dk

aditivita Riemannova integrálu, Věta 2.17

derivace funkce horní meze, Věta 2.19, Dk T

linearita Newtonova integrálu, Věta 2.20, Dk

Newtonův integrál a uspořádání, Věta 2.21, Dk

aditivita Newtonova integrálu, Věta 2.22

per partes pro Newtonův integrál, Věta 2.24

substituce pro Newtonův integrál, Věta 2.25

konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu, Věta 2.26

vztah Riemannova a Newtonova integrálu, Věta 2.27

vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu, Věta 2.3

integrální kritérium, Věta 2.28

délka křivky, Věta 2.29

srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu, Věta 2.30

limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu, Věta 2.31, Dk 2. T

Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu, Věta 2.33

metrika a norma, Věta 3.1, Dk T
vlastnosti konvergence, Věta 3.2
vlastnosti otevřených množin, Věta 3.3, Dk T
vlastnosti uzavřených množin, Věta 3.4
vztah otevřených a uzavřených množin, Věta 3.5
otevřené podmnožiny \mathbb{R} , Věta 3.6
charakterizace spojitosti, Věta 3.7
~~lipschitzovské a stejnoměrně spojitě zobrazení, Věta 3.8~~
totální diferenciál a parciální derivace, Věta 4.1
totální diferenciál a spojitost, Věta 4.2, Dk
spojité parciální derivace a totální diferenciál, Věta 4.3
derivace podle vektoru, totální diferenciál a gradient, Věta 4.4
řetězkové pravidlo, Věta 4.5
záměnnost parciálních derivací, Věta 4.6
o implicitně zadané funkci, Věta 4.7
nutná podmínka existence lokálního extrému, Věta 4.8, ~~Dk T~~