Bonusové cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 3

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \mathrm{d}x$

   Řešení: SK: $|f(x)| \leq 1$ na $(0, \frac{\pi}{2}]$. Dále $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}$, tedy je konvergentní.

   Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f|$ konverguje.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin e^x|\, dx$

   Řešení:
   Provedeme substituci $t = e^x$. Potom $x = \log t$ a $\mathrm{d}x = 1/t\ \mathrm{d}t$, integrál tak přejde na tvar
   $$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$$
   o němž je známo (z tabulky), že diverguje.

   (c) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log(1+x) \sin x\, \mathrm{d}x$

   Řešení: Funkce je spojitá na $(0, 1]$. U 0 LSK s $g(x) = x^\alpha \cdot x \cdot x$. Máme $\int_0^1 x^{\alpha+2}\, \mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha + 2 > -1$, tedy $\alpha > -3$.
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \log(1+x) \sin x}{x^\alpha \cdot x \cdot x} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 \in (0, \infty).$$
   Závěr: $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 g(x)$, což je právě pro $\alpha > -3$.

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x$

   Řešení: U 0 LSK s $g(x) = (\log \frac{1}{x})^{-\alpha} = (-\log x)^{-\alpha}$.
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}}{(\log \frac{1}{x})^{-\alpha}} = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty).$$
   Tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)$. Z tabulky konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Tedy konverguje i původní $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.
   U 1: LSK s $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha} = (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}$.
   $$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}}{\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}} = \sqrt{2} \cdot 1.$$
   Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)$, což je právě pro $\frac{1}{2} - \alpha > -1$ (lze přímo upočítat).
   Závěr: Konverguje právě tehdy, když $\alpha < \frac{3}{2}$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \log(\arctan x)\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{(e^{1-x}-1)^\alpha}\,\mathrm{d}x,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Řešení:

U 0: Funkce je spojitá na $(0,1)$. Platí $\arctan x \approx x$, tedy $\log(\arctan x)\approx \log x$, a zároveň $\frac{\pi}{2}-\arcsin x \approx \frac{\pi}{2}$, $(e^{1-x}-1)\approx e-1$. Tedy LSK s $g(x)=|\log x|$:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|\log(\arctan x)|\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{(e^{1-x}-1)^\alpha}}{|\log x|} = 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(e-1)^{-\alpha}\in(0,\infty).$$

Protože $\int_0^{\frac{1}{2}}|\log x|\,dx$ konverguje, konverguje i $\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,dx$ pro všechna $\alpha\in\mathbb{R}$.

U 1: Použijeme odhady:

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\arccos x\approx\sqrt{(1-x)},\qquad e^{1-x}-1\approx 1-x.$$

Dále $\log(\arctan x)\approx\log(\frac{\pi}{4})$. Tedy LSK s

$$g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}=(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|\log(\arctan x)|\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{(e^{1-x}-1)^\alpha}}{(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}}=\left|\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\cdot\sqrt{2}\cdot 1^\alpha\in(0,\infty).$$

Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|\,dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}\,dx$, což nastane právě pro

$$\frac{1}{2}-\alpha>-1\iff\alpha<\frac{3}{2}.$$

Závěr: Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha<\frac{3}{2}$.

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Pro $\alpha\le 0$ máme $e^{-\alpha x^2}\ge 1$. Ze SK tedy plyne, že $\int_0^\infty f(x)\ge\int_0^\infty 1=\infty$. Navíc $\int_{-\infty}^\infty f(x)=2\int_0^\infty f(x)$. Tedy diverguje.

Pro $\alpha>0$ máme: $f(x)$ je spojitá na $[0,1]$. Na intervalu $[1,\infty)$ máme SK:

$$f(x)\le e^{-\alpha x},$$

kde $\int_1^\infty e^{-\alpha x}$ konverguje. Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)$ konverguje ze sudosti funkce $f(x)$.

Závěr: Integrál konverguje právě pro $\alpha>0$.

(g) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Funkce f je spojitá na $(0,1]$, problematický bod je tedy 0. Přepíšeme a pak substituujeme $y=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$, $\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

$$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x}}\left|\cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right|\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x}}\left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\right|\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty 2|\cos y|=\infty.$$

Závěr: integrál diverguje.

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Nejprve přepíšeme

$$\log(\cos x)\tan^\alpha x = \log(\cos x)\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}$$

U 0 srovnáme s $g(x) = |\cos x - 1|x^\alpha = (1-\cos x)x^\alpha$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|\log(\cos x)|\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}{(1-\cos x)x^\alpha} = 1\cdot 1\cdot 1$$

Následně srovnáme LSK funkci $g(x)$ s funkcí $g(x) = x^2x^\alpha$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1-\cos x)x^\alpha}{x^2x^\alpha} = \frac{1}{2}$$

Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)$, což platí právě pro $2+\alpha > -1$, tedy $\alpha > -3$.
U $\frac{\pi}{2}$ srovnáme s funkcí $g(x) = |\log(\cos x)|\frac{\sin x}{\cos^\alpha x}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{|\log(\cos x)|\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}{|\log(\cos x)|\frac{\sin x}{\cos^\alpha x}} = 1.$$

Dále vyšetříme integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\log(\cos x)|\frac{\sin x}{\cos^\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

po substituci $y = \cos x$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{|\log(y)|}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y$$

Tento integrál ale konverguje právě pro $\alpha < 1$.
Závěr: původní integrál absolutně konverguje právě pro $\alpha \in (-3, 1)$.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)\sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)}\,\mathrm{d}x$

Řešení:
U 0: Použijeme:

$$|\log(1-x)| \approx |-x| = x, \qquad \sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} \approx \sqrt{x}, \qquad \sin(\pi x^2) \approx \pi x^2.$$

Tedy LSK s $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\pi x^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log(1-x)|\sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)}}{\frac{1}{\pi\sqrt{x}}} = 1 \in (0,\infty).$$

Protože $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, konverguje i $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

U 1: Platí

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} \approx \sqrt{1-x}, \qquad \sin(\pi x^2) \approx (\pi - \pi x)$$

(Odhad pro $\sin(\pi x^2)$ najdeme pomocí Taylorova rozvoje v 1.)
Tedy LSK s $g(x) = \frac{|\log(1-x)|\sqrt{1-x}}{\pi(1-x)}$:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{|\log(1-x)|\sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)}}{\frac{|\log(1-x)|}{\pi\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

Speciálogě:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\pi(1-x)}{\sin(\pi x^2)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{-\pi}{\cos(\pi x^2)2\pi x} = \frac{1}{2}$$

Stačí tedy vyšetřit $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{|\log(1-x)|}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$. Substituce $t = 1-x$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\log t|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

což konverguje.
Závěr: Integrál konverguje.

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\frac{\log x}{\log(1+x)}x^\alpha\,dx$

Řešení:
U 0 použijeme LSK a odhady

$$\log(1+x) \approx x, \qquad x-1 \approx 1.$$

Srovnáváme tedy s funkcí $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}|\log x|x^\alpha}{x} = |\log x|x^{\alpha-2/3}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{|x-1|}}\frac{|\log x|}{\log(1+x)}x^\alpha}{x^{\alpha-2/3}|\log x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\log(1+x)}\frac{1}{|\sqrt[3]{x-1}|} = 1 \in (0,\infty)$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy stačí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+1/3-1}|\log x|\,dx$$

Tento integrál konverguje právě pro $\alpha - 2/3 > -1$, tedy pro $\alpha > -1/3$
U 1 použijeme odhady

$$x \approx 1, \quad \log(1+x) \approx \log 2, \quad \log x \approx x-1$$

Srovnáváme tedy s funkcí $g(x) = \left|\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}\right|$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{|x-1|}}\frac{|\log x|}{\log(1+x)}x^\alpha}{\left|\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}\right|} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt[3]{x}\cdot x^\alpha}{\log(1+x)}\frac{|\log x|}{|x-1|} = \frac{1}{\log 2} \in (0,\infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{2/3}$$

Tento integrál konverguje absolutně (spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu).

Závěr: Integrál konverguje právě pro $\alpha > -1/3$, a to absolutně.