Bonusové cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 3

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Poznámka 2. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$, $a < b$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $|f| \leq g$, f, g jsou spojité na $[a, b)$. Pokud $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje též. (A tedy diverguje-li $\int_a^b f$, diverguje i $\int_a^b g$.)

Důsledek 3 (Kalenda, Holický, Metody řešení vybraných úloh z MA)**.** Nechť je f spojitá na (a, b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, tak i konverguje.

Věta 4 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Algoritmus

1. Možná je vhodné daný interval **roztrhnout** a vyšetřovat každý konec zvlášť.
2. Je funkce **spojitá na <u>omezeném uzavřeném</u>** intervalu? Lze ji **spojitě dodefinovat**?
3. Je možné integrál přímo (snadno) **upočítat**? Je možné jej (např. substitucí) převést na **tabulkový integrál**?
4. **SK** a **LSK**. (Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.)
   (a) Známe nějaký *odhad*?
   (b) Známe nějakou *tabulkovou limitu*?
   (c) Pomohl by *Taylorův rozvoj*?
   (d) Co bychom vytkli, kdybychom počítali *limitu*?
   (e) Kraj u nekonečna: Jak bychom postupovali u *řad*?

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a)❀ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \,\mathrm{d}x$

(b)✿ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin e^x| \, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log(1+x) \sin x \,\mathrm{d}x$

(d)★ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}} \,\mathrm{d}x$

(e)❀ $\displaystyle\int_0^1 \ln(\arctan x) \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^\alpha} \,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \,\mathrm{d}x$

(g)❆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

(h)✻ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \tan^\alpha x \,\mathrm{d}x$

(i)✾ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)} \,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} x^\alpha \, dx$

(1a) SK, $|f| \le 1$
(1b) Substituce $t = e^x$.
(1d) $\log\frac{1}{x} = -\log x$
(1e) u 1: $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$
(1g) Substituce $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

(1h) $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$.
u $\frac{\pi}{2}$ LSK s $\frac{|\log(\cos)|\sin x}{\cos^\alpha x}$
Konvergence g přes substituci $y = \cos x$.
(1i) u 1: $\sin\pi \approx \pi(1-x)$, tedy $g = \frac{|\log(1-x)|}{\pi\sqrt{1-x}}$.
Kovergence g: substituce $y = 1 - x$.