# 26. cvičení – Lagrangeovy multiplikátory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

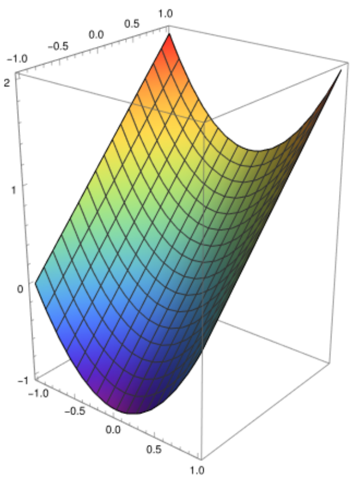
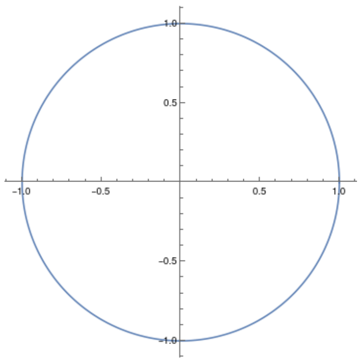
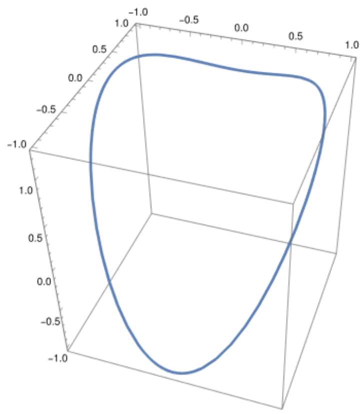
1. Najděte globální extrémy funkcí na množině $M$

   (a) $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

   **Řešení:**

   Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   - Označme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
     Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je $M$ uzavřená. $M$ je navíc omezená - jde o kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Tedy $M$ je kompakt.
     Tedy funkce $f$ nabývá na $M$ extrémů.

   - Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
     – Vyšetřeme body, kde má $g$ nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

     $$\nabla g = (2x, 2y) = (0,0).$$

     Tedy $(x,y) = (0,0)$. Tento bod ale neleží v $M$.

     – Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem $\lambda$.

     $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ 1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme

$$2x(1+\lambda) = 0.$$

Tedy $x = 0$ nebo $\lambda = -1$.
Pokud $x = 0$, tak z vazební podmínky je

$$y^2 = 1$$

tedy máme podezřelé body $[0, 1]$ a $[0, -1]$.
Pokud $\lambda = -1$, tak z druhé rovnice je $y = \frac{1}{2}$. Z vazební podmínky pak máme podezřelé body $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1 \\ f(0,-1) &= -1 \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \\ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $[0, -1]$ s hodnotou $-1$ a maxima v bodech $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{5}{4}$.

(b) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$

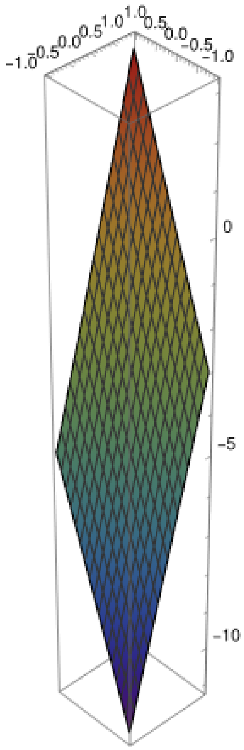
**Řešení:**

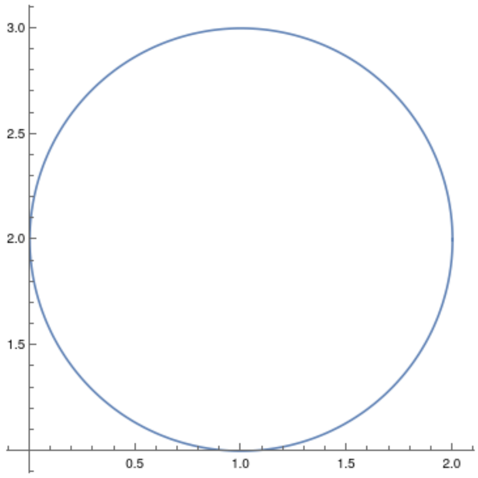
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

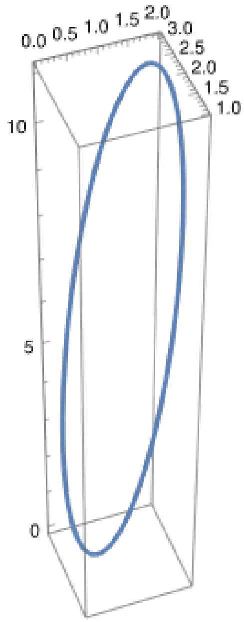
- Označme $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je $M$ uzavřená. $M$ je navíc omezená - jde o kružnici se středem v bodě $[1, 2]$ a poloměrem 1. Tedy $M$ je kompakt.
Tedy funkce $f$ nabývá na $M$ extrémů.
- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má $g$ nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x - 2, 2y - 4) = (0, 0).$$

Tedy $(x, y) = (1, 2)$. Tento bod ale neleží v $M$.





- Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem $\lambda$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 4 + \lambda \cdot 2(x-1) &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 2(y-2) &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$x - 1 = -\frac{2}{\lambda}$$
$$y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)
Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{5}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ a $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right) &= 1 \\
f\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right) &= 11
\end{aligned}
$$

  Tedy funkce nabývá minima v bodě $[\frac{1}{5},\frac{7}{5}]$ s hodnotou 1 a maxima v bodě $[\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$. s hodnotou 11.

(c) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$

**Řešení:**

Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y,z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je $M$ uzavřená. $M$ je navíc omezená - jde o povrch elipsoidu se středem v počátku, který se vejde do koule $B(o,3)$. Tedy $M$ je kompakt.
  Tedy funkce $f$ nabývá na $M$ extrémů.

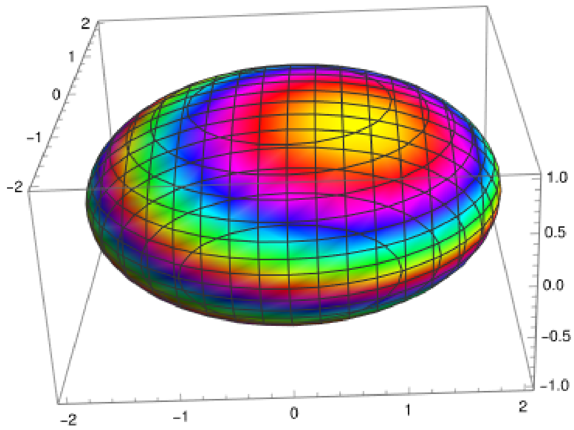



Figure 1: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má $g$ nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x, 2y, 8z) = (0,0,0).$$

    Tedy $(x,y,z) = (0,0,0)$. Tento bod ale neleží v $M$.

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem $\lambda$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ g(x,y,z) &= 0\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}1+\lambda\cdot 2x &= 0\\ -1+\lambda\cdot 2y &= 0\\ 3+\lambda\cdot 8z &= 0\\ x^2+y^2+4z^2-4 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{2\lambda}\\ y &= \frac{1}{2\lambda}\\ z &= -\frac{3}{8\lambda}\end{aligned}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda=0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.) Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{17}}{8}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{3}{\sqrt{17}}]$. a $[-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{3}{\sqrt{17}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= \sqrt{17}\\ f\left(-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= -\sqrt{17}\end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left(-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $-\sqrt{17}$ a maxima v bodě $\left(\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $\sqrt{17}$.

(d) $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 5x^2-6xy+5y^2-4=0\}$
**Řešení:**
Zdroj: https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

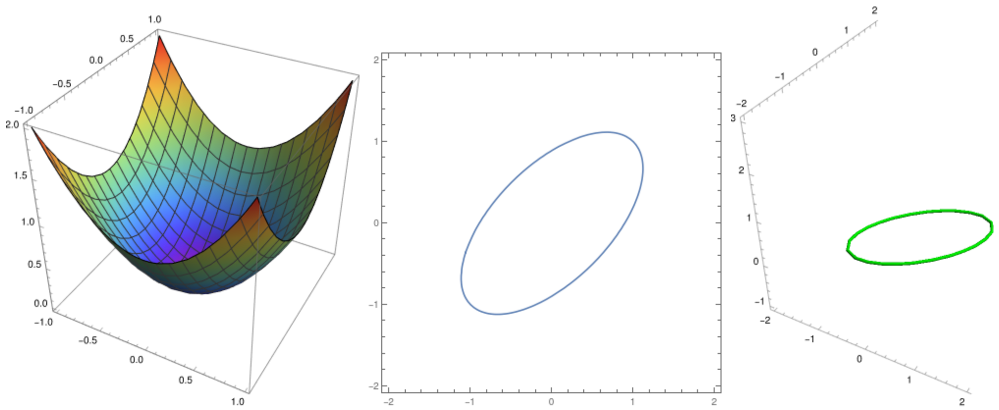
- Označme $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je $M$ uzavřená.
  $M$ je navíc omezená - jde o pootočenou elipsu (to by se ukázalo, kdybychom „otočili“ soustavu souřadnic). Omezenost plyne z těchto odhadů:

$$5(x^2 + y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2 + y^2)$$

  tedy

$$2(x^2 + y^2) \leq 4$$

  Tedy $M$ je kompakt.
  Tedy funkce $f$ nabývá na $M$ extrémů.



- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má $g$ nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (10x - 6y, -6x + 10y) = (0, 0).$$

    Tedy $(x,y) = (0,0)$. Tento bod ale neleží v $M$.
  - Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem $\lambda$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

    Tedy

$$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot (10x - 6y) &= 0 \\ 2y + \lambda \cdot (-6x + 10y) &= 0 \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned} x(5\lambda+1) &= 3\lambda y \\ y(5\lambda+1) &= 3\lambda x \end{aligned}$$

Vyloučíme možnost $\lambda = 0$, protože pak by byl řešením bod $(0,0)$, který nesplňuje vazební podmínku. Analogicky vyloučíme možnost $(5\lambda+1) = 0$. Uvažujeme-li $x = 0$, tak opět vyjde řešení $(0,0)$. Analogicky pro $y = 0$. Můžeme tedy obě rovnice vynásobit postupně $y$ a $x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} yx(5\lambda+1) &= 3\lambda y^2 \\ xy(5\lambda+1) &= 3\lambda x^2 \end{aligned}$$

Tedy $y = \pm x$.
Dosazením do vazební podmínky získáme pro $y = x$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

a pro $y = -x$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

tedy máme podezřelé body $[1,1]$, $[-1,-1]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(1,1) = &\quad 2 \\ f(-1,-1) = &\quad 2 \\ f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = &\quad \frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = &\quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Tedy funkce nabývá minima v bodech $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{1}{2}$ a maxima v bodech $[1,1]$, $[-1,-1]$ s hodnotou 2.

**Zkouškové příklady**

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině $M$

   (a) $f(x,y) = x^4 y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16,\ x \geq -1\}$
   **Řešení:**

   - Označme

     $$g_1(x,y) = x^4 + y^4 - 16, \qquad g_2(x,y) = x + 1,$$

     a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze množinu $M$ zapsat ve tvaru

     $$M = M_1 \cap M_2,$$

     kde

     $$M_1 = \{(x,y) \in G : \ g_1(x,y) \leq 0\}$$

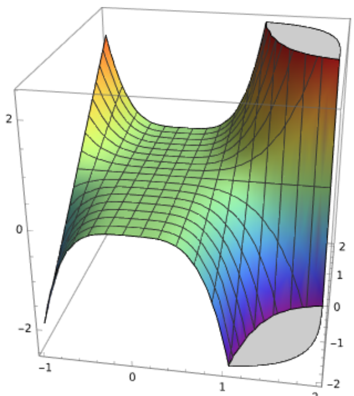
a

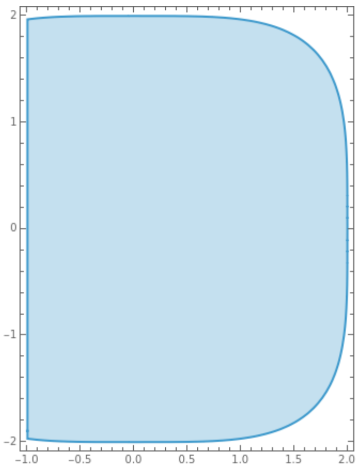
$$M_2 = \{(x,y) \in G : \ g_2(x,y) \geq 0\}.$$

Funkce $f, g_1, g_2$ jsou polynomy, tedy patří do $\mathcal{C}^1(G)$. Tedy množiny $M_1$ i $M_2$ jsou uzavřené (vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení).
Množina $M$ je uzavřená jako průnik uzavřených množin. Navíc je omezená, neboť z podmínky $x^4 + y^4 \leq 16$ plyne

$$|x| \leq 2, \qquad |y| \leq 2.$$

Tedy $M$ je kompakt.
Proto funkce $f$ nabývá na $M$ globálního maxima i minima.




- Budeme vyšetřovat nejprve vnitřní kritické body množiny $M$, tedy body s

  $$x^4 + y^4 < 16, \qquad x > -1.$$

  V takovém bodě musí platit

  $$\nabla f(x,y) = (4x^3y, x^4) = (0,0).$$

  To platí pro body tvaru $(0,y)$, $y \in (-2,2)$. Navíc platí

  $$f(0,y) = 0.$$

- Na části hranice dané podmínkou

  $$x^4 + y^4 = 16, \qquad x \geq -1$$

  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů pro vazbu

  $$g(x,y) = x^4 + y^4 - 16 = 0.$$

  Platí

  $$\nabla f = (4x^3y, x^4), \qquad \nabla g = (4x^3, 4y^3).$$

Hledáme tedy řešení soustavy

$$\begin{aligned} 4x^3y &= \lambda\, 4x^3 \\ x^4 &= \lambda\, 4y^3 \\ x^4 + y^4 &= 16. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyplývá, že buď $x = 0$ nebo $y = \lambda$. Nejprve uvažujme případ $x = 0$. Pak z vazební podmínky dostaneme

$$y^4 = 16,$$

tedy $y = \pm 2$, a tedy body

$$(0, 2), \qquad (0, -2).$$

V těchto bodech je

$$f(0, 2) = 0, \qquad f(0, -2) = 0.$$

Nechť nyní $y = \lambda$. Dosazením do druhé rovnice:

$$x^4 = 4y^4.$$

Z vazební podmínky pak plyne

$$x^4 + y^4 = 16, \qquad 4y^4 + y^4 = 16,$$

tedy

$$5y^4 = 16, \qquad y^4 = \frac{16}{5}.$$

Odtud

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, \qquad x^4 = \frac{64}{5}, \qquad x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}.$$

Celkem 4 body (všechny kombinace znamének).
Protože však musí platit ještě podmínka $x \geq -1$, zůstanou pouze ty body z tohoto řešení, pro které je $x \geq -1$. Vzhledem k tomu, že zde vychází $|x| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}} > 1$, připadá v úvahu jen kladná hodnota

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}.$$

Dostáváme tedy dva body

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right), \qquad \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right).$$

Ještě musíme vyšetřit okraj daný podmínkou $x = -1$.

- Na části hranice dané podmínkou $x = -1$, $x^4 + y^4 < 16$ dostaneme

$$1 + y^4 < 16,$$

tedy

$$|y| < \sqrt[4]{15}.$$

Funkce na této množině je tvaru

$$f(-1, y) = y.$$

Z toho plyne, že na tomto úseku nabývá minima v bodě

$$(-1, -\sqrt[4]{15})$$

a maxima v bodě

$$(-1, \sqrt[4]{15}).$$

Tyto body zde ale neleží.
- Zbývá „hranice hranice", neboli body $(-1, \sqrt[4]{15})$ a $(-1, -\sqrt[4]{15})$.
- Spočteme hodnoty funkce ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned}
f(0,2) &= 0,\\
f(0,-2) &= 0,\\
f\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right)^4 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{5}} = \frac{64}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{5}} = \frac{128}{5\sqrt[4]{5}},\\
f\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) &= -\frac{128}{5\sqrt[4]{5}},\\
f(-1, \sqrt[4]{15}) &= -\sqrt[4]{15},\\
f(-1, -\sqrt[4]{15}) &= \sqrt[4]{15}.
\end{aligned}$$

Porovnáním hodnot dostáváme, že globální minimum je $-\frac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ a nabývá se v bodě $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)$. Globální maximum je $\frac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ a nabývá se v bodě $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)$.

(b) $f(x, y) = 2x + 4y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

**Řešení:**

- Označme

$$g_1(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1, \qquad g_2(x, y) = x, \qquad g_3(x, y) = y$$

a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze množinu $M$ zapsat ve tvaru

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3,$$

kde

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x, y) \in G : \ g_1(x, y) \leq 0\},\\
M_2 &= \{(x, y) \in G : \ g_2(x, y) \geq 0\},
\end{aligned}$$

a

$$M_3 = \{(x,y) \in G: \; g_3(x,y) \geq 0\}.$$

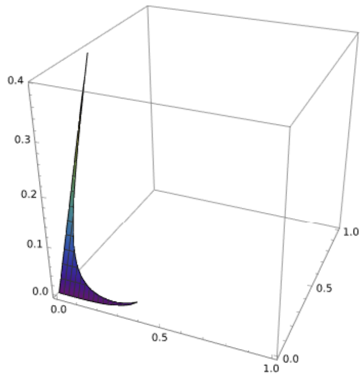
Funkce $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^1(G)$. Množiny $M_1$, $M_2$ a $M_3$ jsou uzavřené jako vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení. Množina $M$ je uzavřená, protože je průnikem uzavřených množin.
Navíc je omezená, neboť z nerovnosti

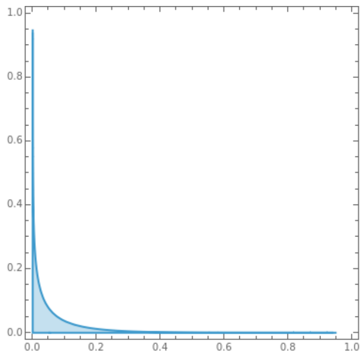
$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1$$

plyne

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

Tedy $M$ je kompakt.
Proto funkce $f$ nabývá na $M$ globálního maxima i minima.




- Budeme vyšetřovat nejprve vnitřní kritické body množiny $M$, tedy body s

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} < 1, \qquad x > 0, \; y > 0.$$

V takovém bodě musí platit

$$\nabla f(x,y) = (2,4) = (0,0).$$

Tato rovnice nemá řešení. Tedy vnitřku množiny $M$ nejsou žádné kritické body.

- Na části hranice dané podmínkou

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \qquad x > 0, \; y > 0$$

použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů pro vazbu

$$g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1 = 0.$$

Platí

$$\nabla f = (2,4), \qquad \nabla g = \left(\frac{1}{4x^{3/4}}, \frac{1}{4y^{3/4}}\right).$$

Hledáme tedy řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda \frac{1}{4x^{3/4}} \\ 4 &= \lambda \frac{1}{4y^{3/4}} \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} &= 1. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme

$$\lambda = 8x^{3/4} = 16y^{3/4}.$$

Tedy

$$x^{3/4} = 2y^{3/4}, \qquad x = 2^{4/3}y.$$

Položme $u = \sqrt[4]{x}$, $v = \sqrt[4]{y}$. Pak $u + v = 1$ a $u = 2^{1/3}v$, tedy

$$v = \frac{1}{1 + 2^{1/3}}, \qquad u = \frac{2^{1/3}}{1 + 2^{1/3}}.$$

Odtud

$$x = \left(\frac{2^{1/3}}{1 + 2^{1/3}}\right)^4, \qquad y = \left(\frac{1}{1 + 2^{1/3}}\right)^4.$$

- Na množině $x = 0$, $0 \le y \le 1$ máme $f(0, y) = 4y$. Podezřelé body jsou tedy $(0, 0)$ a $(0, 1)$, kde $f(0, 1) = 4$ a $f(0, 0) = 0$.
- Na množině $y = 0$, $0 \le x \le 1$ máme $f(x, 0) = 2x$. Podezřelé body jsou tedy $(0, 0)$ a $(1, 0)$, kde $f(1, 0) = 2$ a $f(0, 0) = 0$.
  Na hranicích os
  - Na ose $y = 0$, $0 \le x \le 1$ máme $f(x, 0) = 2x$. Extrém je v bodě $(1, 0)$, kde $f(1, 0) = 2$.
- Spočteme hodnoty funkce ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{2^{1/3}}{1 + 2^{1/3}}\right)^4, \left(\frac{1}{1 + 2^{1/3}}\right)^4\right) &= \frac{8}{(1 + 2^{1/3})^4}, \\ f(0, 1) &= 4, \\ f(1, 0) &= 2, \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

  Porovnáním hodnot dostáváme, že globální minimum je 0 a nabývá se v bodě $(0, 0)$. a globální maximum je 8 a nabývá se v bodě $(0, 1)$.

(c) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 1\}$
**Řešení:**

- Označme

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$$

  a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze množinu $M$ zapsat ve tvaru

$$M = \{(x, y) \in G : \ g(x, y) \le 0\}.$$

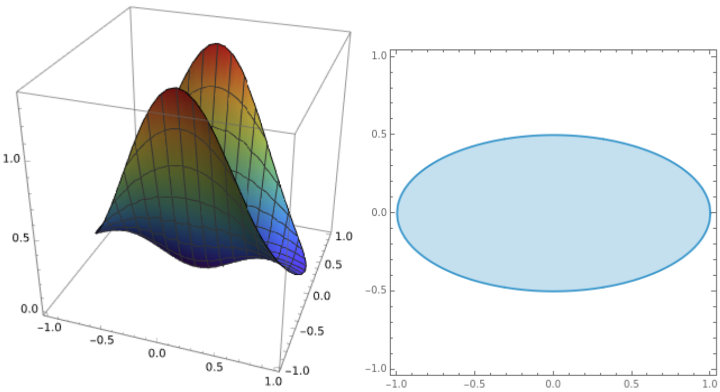
Funkce $f$ i $g$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Množina $M$ je uzavřená jako vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.
Navíc z podmínky

$$x^2 + 4y^2 \leq 1$$

plyne

$$|x| \leq 1, \qquad |y| \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy $M$ je omezená (jde o elipsu).
Protože $M$ je uzavřená a omezená v $\mathbb{R}^2$, je kompaktní. Funkce $f$ tedy na $M$ nabývá globálního maxima i minima.




- Budeme nejprve hledat kritické body ve vnitřku množiny $M$, tedy body splňující

$$x^2 + 4y^2 < 1.$$

Spočteme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-(2x^2+y^2)} - 4x(x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)},$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-(2x^2+y^2)}\left(1 - 2x^2 - 14y^2\right).$$

Dále

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 14ye^{-(2x^2+y^2)} - 2y(x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)},$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-(2x^2+y^2)}\left(7 - x^2 - 7y^2\right).$$

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x(1 - 2x^2 - 14y^2) &= 0, \\ 2y(7 - x^2 - 7y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice:

$$x = 0 \qquad \text{nebo} \qquad 1 - 2x^2 - 14y^2 = 0.$$

Z druhé rovnice:

$$y = 0 \qquad \text{nebo} \qquad 7 - x^2 - 7y^2 = 0.$$

Vyšetříme jednotlivé možnosti.

- Je-li $x = 0$ a $y = 0$, dostáváme bod
$$(0, 0).$$
- Je-li $x = 0$, pak z druhé rovnice:
$$2y(7 - 7y^2) = 0.$$
Tedy
$$y = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y = \pm 1.$$
Body $(0, \pm 1)$ však neleží v $M$, protože
$$0^2 + 4 \cdot 1^2 = 4 > 1.$$
- Je-li $y = 0$, pak z první rovnice:
$$2x(1 - 2x^2) = 0.$$
Tedy
$$x = 0 \qquad \text{nebo} \qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Body
$$\left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$
leží v $M$, protože
$$\frac{1}{2} \leq 1.$$
- Zbývá případ
$$1 - 2x^2 - 14y^2 = 0, \qquad 7 - x^2 - 7y^2 = 0.$$
Ze druhé rovnice:
$$x^2 + 7y^2 = 7.$$
Dosadíme do první:
$$1 - 2(7 - 7y^2) - 14y^2 = 0,$$
tedy
$$1 - 14 + 14y^2 - 14y^2 = 0,$$
což dává spor
$$-13 = 0.$$
Tedy další kritické body neexistují.

Vnitřní kritické body jsou tedy

$$(0,0), \qquad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

- Nyní vyšetříme hranici množiny

$$x^2+4y^2=1.$$

Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů pro vazbu

$$g(x,y)=x^2+4y^2-1=0.$$

Platí

$$\nabla g(x,y)=(2x,8y).$$

Hledáme řešení soustavy

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2xe^{-(2x^2+y^2)}(1-2x^2-14y^2)&=2\lambda x,\\ 2ye^{-(2x^2+y^2)}(7-x^2-7y^2)&=8\lambda y,\\ x^2+4y^2&=1. \end{aligned}$$

  – Je-li $x=0$, pak z vazby:

$$4y^2=1,$$

tedy

$$y=\pm\frac{1}{2}.$$

Dostáváme body

$$\left(0,\pm\frac{1}{2}\right).$$

  – Je-li $y=0$, pak z vazby:

$$x^2=1,$$

tedy

$$x=\pm1.$$

Dostáváme body

$$(\pm1,0).$$

  – Předpokládejme nyní $x\neq0$ a $y\neq0$. Pak můžeme dělit:

$$\begin{aligned} e^{-(2x^2+y^2)}(1-2x^2-14y^2)&=\lambda,\\ e^{-(2x^2+y^2)}(7-x^2-7y^2)&=4\lambda. \end{aligned}$$

Po eliminaci $\lambda$:

$$7-x^2-7y^2=4(1-2x^2-14y^2).$$

Po úpravě:

$$7 - x^2 - 7y^2 = 4 - 8x^2 - 56y^2,$$

tedy

$$7x^2 + 49y^2 + 3 = 0.$$

To je spor, protože levá strana je kladná. Tedy další body na hranici neexistují.

Kandidáti na extrémy jsou tedy body

$$(0,0), \qquad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad \left(0, \pm\frac{1}{2}\right), \qquad (\pm 1, 0).$$

- Spočteme hodnoty funkce v nalezených bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \frac{1}{2}e^{-1}, \\ f\left(0, \pm\frac{1}{2}\right) &= \frac{7}{4}e^{-1/4}, \\ f(\pm 1, 0) &= e^{-2}. \end{aligned}$$

Porovnáním hodnot dostáváme:

$$0 < e^{-2} < \frac{1}{2}e^{-1} < \frac{7}{4}e^{-1/4}.$$

Proto globální minimum je

$$\min_M f = 0$$

a nabývá se v bodě

$$(0,0).$$

Globální maximum je

$$\max_M f = \frac{7}{4}e^{-1/4}$$

a nabývá se v bodech

$$\left(0, \pm\frac{1}{2}\right).$$