26. cvičení – Lagrangeovy multiplikátory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeovy multiplikátory). Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G, g(x, y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$

Algoritmus: Extrémy na kompaktní množině:

1. Je-li množina uzavřená a omezená, tak odůvodníme, že **spojitá** funkce na **kompaktu** nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na **vnitřku** množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
   (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy) - použijeme Lagrangeovy multiplikátory nebo zkusíme dosadit a výraz zjednodušit.
   (d) na hranici hranice: **krajní body**, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepíšeme a **porovnáme** jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x, y) = x^2 + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   (b) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$
   (c) $f(x, y, z) = x - y + 3z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$
   (d)❀ $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Zkouškové příklady

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x, y) = x^4 y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
   (b) $f(x, y) = 2x + 4y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (c) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

(1d) $5(x^2 + y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2 + y^2)$