Kalkulus 1 - letní semestr 2025–2026

1 Taylorův polynom

1.1 Základní vlastnosti

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** funkce f v bodě a řádu n.

Úmluva. Výraz $(x-a)^0$ chápeme jako 1, a to i pro $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f a symbolem $T_0^{f,a}$ rozumíme $f(a)$.

Příklad.

$$T_5^{e^x,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$T_9^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

Poznámka. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.

Máme

$$(T_n^{f,a}(x))' = f'(a) \cancel{+ f''(a)(x-a)} + \frac{1}{2!}f''(a)2(x-a) + \frac{1}{3!}f'''(a)3(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

a zároveň

$$T_{n-1}^{f',a}(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f'''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}.$$

Věta 1.1 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n. Nechť $n = 1$. Potom platí

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0.\end{aligned}$$

konec 1. přednášky (18. 2. 2026)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a tvrzení věty platí pro $n-1$. To znamená, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tento předpoklad využijeme pro $g = f'$. Víme, že funkce f' má v bodě a vlastní $(n-1)$-ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{1}$$

Funkce f je spojitá v bodě a, neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a. Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla. Dostaneme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x-a)^n\big)'}.$$

Dále platí $\big(T_n^{f,a}\big)' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (1) vyplývá, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Lemma (aproximace polynomu). *Nechť Q je polynom, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{st} Q \le n$, $a \in \mathbb{R}$ a*

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Protože má Q v bodě a kořen, nalezneme $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R taková, že $Q(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Odtud plyne, že

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n-k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n-k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech případech dostáváme spor. □

Věta 1.2 (jednoznačnost Taylorova polynomu). *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující $\operatorname{st} P \le n$ a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 1.1 víme, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \left(\frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} \right) = 0 + 0 = 0.$$

Dále platí $\operatorname{st}\bigl(T_n^{f,a} - P\bigr) \le n$, a tedy je podle lemmatu $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. □

Věta 1.3 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a,x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \tag{2}$$

Důkaz. Definujme funkci $F\colon [a,x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a,x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a,x), neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $[a,x]$. Položme

$$\varphi(t) = (x-t)^{n+1}, \quad t \in [a,x].$$

Funkce φ je spojitá na $[a,x]$ a na (a,x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Cauchyovy věty nalezneme $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

konec 2. přednášky (20. 2. 2026)

Zvolme $t \in (a,x)$. Potom

$$\begin{aligned} F'(t) = -\Bigl(& f'(t) + f'(t)\cdot(-1) + f''(t)(x-t) + \frac{1}{2!} f''(t)(-2)(x-t) + \frac{1}{2!} f'''(t)(x-t)^2 \\ & + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \Bigr) \\ = & -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n, \end{aligned}$$

a dále

$$\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Dosadíme-li $t = \xi$, dostaneme

$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n, \qquad \varphi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, dále

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(a) = (x-a)^{n+1}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

tedy

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

$\square$

1.2 Symbol „malé o“

Definice. Nechť f a g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je v bodě a **malé** o od g, značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámky. (a) Výraz „$f(x) = o(g(x))$, $x \to a$“ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi.

(b) Tvrzení Věty 1.1 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \to a$, znamená, že $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

(d) Symbol o lze použít i pro jednostranné limity.

(e) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \to a$ vynechávat.

Poznámky. Platí například

$$\begin{aligned} &x^3 = o(x^2),\ x \to 0, \\ &x^2 = o(x^3),\ x \to \infty, \\ &e^{-x} = o(x^\alpha),\ x \to \infty \quad \text{pro kadé } \alpha \in \mathbb{R}, \\ &1 - x = o(\arccos x),\ x \to 1_-, \end{aligned}$$

Věta 1.4 (aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(b) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(c) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(d) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(e) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(f) *Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.*

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z věty o aritmetice limit. $\square$

Věta 1.5 (malé o a skládání)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Předpokládejme, že platí $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta)\colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o limitě složené funkce (P). $\square$

konec 3. přednášky (25. 2. 2026)

1.3 Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a**. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{3}$$

pro nějaká $x, a \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (3) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0, takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$. V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Věta 1.6 (Taylorova řada funkce exp)**.** *Platí*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

Důkaz. Funkce exp má v bodě 0 derivace všech řádů a platí $\exp^{(n)}(0) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zvolme $x \in (0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Lagrangeova tvaru zbytku nalezneme $\xi_n \in (0, x)$ takové, že platí

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{\exp(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tedy

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{\exp(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(x) x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x) x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

plyne odtud vztah

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$ lze tvrzení dokázat obdobně. Pro $x = 0$ tvrzení platí zřejmě. Tím je dokázáno tvrzení věty pro funkci exp. $\square$

Poznámka. Na přednášce jsme též ukazovali konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pro $x = 0$ má řada tvar $1 + 0 + 0 + 0 + \cdots$, tedy je zřejmě konvergentní.

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ položme $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Pak z d'Alembertova kritérie pro absolutní konvergenci máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Tedy z d'Alembertova kritéria řada absolutně konverguje, tedy konverguje.

1.4 Taylorův rozvoj elementárních funkcí v 0

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$		$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$x \in (-1, 1)$
a^x	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$	$a > 0, x \in (-\infty, \infty)$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right] + o(x^{2n+2})$	$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
$(1+x)^r$	$1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots + \binom{r}{n}x^n + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$	$r \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)$
neboli	$1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n$		
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots + o(x^{2n+2})$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in [-1, 1]$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}$$

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 2$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$