2.2 Riemannův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělícími body** D. **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\bigl\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělící body D jsou obsaženy v D'.

Značení. Nechť f je reálná funkce a $M \subset \mathbb{R}$. Potom symbol $\sup_M f$ značí $\sup\{f(x); x \in M\}$ a symbol $\inf_M f$ značí $\inf\{f(x); x \in M\}$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D.

konec 9. přednášky (18. 3. 2026)

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\bigl\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\bigr\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\bigl\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\bigr\}.$$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}(a, b)$.

Poznámka. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

Příklady. (a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $c \in \mathbb{R}$. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem $f(x) = c, x \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$, protože pro každý neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí $\sup_I f = \inf_I f = c$, a tedy $\overline{S}(f,D) = \underline{S}(f,D) = c(b-a)$ pro každé dělení D intervalu $[a,b]$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť D je Dirichletova funkce. Potom $\int_{\underline{a}}^b D(x)\,dx = 0$ a $\int_a^{\overline{b}} D(x)\,dx = (b-a)$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

Tvrzení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) \quad \text{a} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n).$$

Důkaz. Bez Dk. □

Věta 2.10 (aproximace Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je omezená funkce na $[a,b]$ a posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a,b]$ splňuje*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n). \tag{1}$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n). \tag{2}$$

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}(0,1)$ a spočtěte $\int_0^1 f(x)\ dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\overline{S}(f,D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1),$$

$$\underline{S}(f,D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f,D_n) = \lim \overline{S}(f,D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 2.10 pak máme $f \in \mathcal{R}(0,1)$ a $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Věta 2.11 (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}(a,b)$,

(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I\colon \big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Příklad. Nechť $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I, ale není stejnoměrně spojitá na I.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejnoměrné spojitosti. □

Věta 2.12 (spojitost a stejnoměrná spojitost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Důkaz. Bez Dk. □

konec 10. přednášky (20. 3. 2026)

Věta 2.13 (spojitost a riemannovská integrovatelnost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. Funkce f je omezená na $[a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá (Věta 2.12), lze tedy nalézt $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).\end{aligned}$$

Věta 2.11 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. □

Věta 2.14 (monotonie a riemannovská integrovatelnost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b] \colon f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 2.11. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)\big(f(b) - f(a)\big) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle Věty 2.11 tedy platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Věta 2.15 (linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Věta 2.16 (Riemannův integrál a uspořádání)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

konec 11. přednášky (25. 3. 2026)

Důkaz. Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n \to \infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\, dx.$$

□

Věta 2.17 (aditivita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$, právě když $f \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Důkaz. Bez Dk. □

Tato poznámka byla vypuštěna

Poznámka. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x) + \int_c^a f(x)\,dx = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 2.17 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Věta 2.18 (Riemannův integrál a absolutní hodnota)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{4}$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Implikaci $f \in \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(a, b)$ nelze obrátit. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 2D(x) - 1$, kde D je Dirichletova funkce. Potom pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f \notin \mathcal{R}(a, b)$.

Věta 2.19 (derivace funkce horní meze)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $f\colon J \to \mathbb{R}$ a pro každá $a, b \in J$ platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Nechť $c \in J$ a $F\colon J \to \mathbb{R}$ je definovaná předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \textit{pro } x \in J.$$

Potom platí:

(a) F je spojitá na J,

(b) jestliže $x_0 \in \operatorname{Int} J$ a f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J. Nalezneme $\eta > 0$ takové, že $[y_0, y_0 + \eta] \subset J$. Protože je $f \in \mathcal{R}(y_0, y_0 + \eta)$, je f omezená na $[y_0, y_0 + \eta]$. Nechť $K > 0$ splňuje

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \eta] : |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\delta \leq \eta$ a $K\delta < \varepsilon$. Zvolme $y \in [y_0, y_0 + \delta]$. Potom

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left|\int_c^y f(x)\,dx - \int_c^{y_0} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{y_0}^y f(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,dx \leq \int_{y_0}^y K\,dx = K(y - y_0) < K\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0),$$

takže F je spojitá zprava v bodě y_0. Obdobně lze dokázat, že F je spojitá zleva v každém bodě intervalu J, který není levým krajním bodem J.

(b) Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že $P(x_0, \delta) \subset J$ a

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - f(x_0) \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

konec 12. přednášky (27. 3. 2026)

Důkaz Věty **??**. Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle Věty 2.13 platí $f \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$ pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Funkce F je tedy dobře definovaná na (a, b). Z Věty 2.19(b) plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F je primitivní k f na (a, b). □