

Kalkulus 1 - letní semestr 2025–2026

Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině \mathbb{R} , která neobsahuje žádný kořen polynomu Q .

Věta 2.8 (rozklad na parciální zlomky). *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\text{st } P < \text{st } Q$ a nechť*

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q . Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka (postup při hledání primitivní funkce k funkci racionální). Mějme polynomy P a Q . Máme-li integrovat racionální funkci P/Q , pak postupujeme takto:

V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q , vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q . Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R . Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\text{st } P < \text{st } Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q , resp. P/Q , kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Nyní si ukážeme jak na to. Parciální zlomek odpovídající reálnému kořeni a integrujeme následovně:

$$\int \frac{1}{(x - a)^n} dx \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x - a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx &= \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_1} + \\ &+ \left(C - \frac{B\alpha}{2} \right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2 + \alpha x + \beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases} \\ I_2 &= \int \frac{1}{((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4)^q} dx = \\ &= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + \alpha/2}{\sqrt{\beta - \alpha^2/4}} \right)^2 + 1 \right)^q} dx. \end{aligned}$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $y = \frac{x + \alpha/2}{\sqrt{\beta - \alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1 + y^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si ukázali ve výše uvedeném příkladu.

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x + 7}{(x - 2)(x^2 + 2x + 1)}$$

Řešení. Budeme pracovat na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ a $(2, \infty)$, kde je funkce f definovaná a spojitá.

Nejprve upravíme jmenovatel, dostáváme

$$\frac{x + 7}{(x - 2)(x^2 + 2x + 1)} = \frac{x + 7}{(x - 2)(x + 1)^2}$$

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na $\mathcal{D}(f)$ na parciální zlomky. Platí

$$\frac{x + 7}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}. \quad (1)$$

Vynásobením rovnice (1) jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x + 7 = A(x + 1)^2 + B(x - 2)(x + 1) + C(x - 2), \quad (2)$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Polynomy jsou však spojité na \mathbb{R} , a proto vztah (2) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Koeficienty určíme dosazovací metodou.

Dosadíme $x = 2$ do (2):

$$2 + 7 = A(3)^2,$$

odkud

$$9 = 9A \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Dosadíme $x = -1$ do (2):

$$-1 + 7 = C(-3),$$

tedy

$$6 = -3C \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

K určení koeficientu B dosadíme například $x = 0$:

$$0 + 7 = A(1)^2 + B(-2)(1) + C(-2).$$

Po dosazení již zjištěných hodnot $A = 1$, $C = -2$ dostáváme

$$7 = 1 - 2B + 4,$$

tedy

$$7 = 5 - 2B \quad \Rightarrow \quad B = -1.$$

Rozklad (1) má tedy tvar

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x - 2} dx &\stackrel{c}{=} \log|x - 2|, \\ \int \frac{1}{x + 1} dx &\stackrel{c}{=} \log|x + 1|, \\ \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx &= \int (x + 1)^{-2} dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{x + 1}, \end{aligned}$$

Proto na každém z intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ a $(2, \infty)$ je primitivní funkcí k funkci f

$$\log|x - 2| - \log|x + 1| + \frac{2}{x + 1} + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{2x^4 - 4x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Řešení. Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na $\mathcal{D}(f)$ na parciální zlomky. Platí

$$\frac{2x^4 - 4x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2x + 2)^2}. \quad (3)$$

Vynásobením rovnice (3) jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$2x^4 - 4x + 4 = A(x^2 + 2x + 2)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 2x + 2) + (Dx + E)x, \quad (4)$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polynomy jsou však spojité na \mathbb{R} , a proto vztah (4) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Rozepíšeme

$$(x^2 + 2x + 2)^2 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4.$$

a roznásobíme. Dostáváme:

$$2x^4 - 4x + 4 = A(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4) + B(x^4 + 2x^3 + 2x^2) + C(x^3 + 2x^2 + 2x) + Dx^2 + Ex.$$

Po porovnání koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^4: 2 &= A + B, \\ x^3: 0 &= 4A + 2B + C, \\ x^2: 0 &= 8A + 2B + 2C + D, \\ x^1: -4 &= 8A + 2C + E, \\ x^0: 4 &= 4A. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme $A = 1$. Z první rovnice tedy $B = 1$.

Z druhé rovnice

$$0 = 4(1) + 2(1) + C = 6 + C,$$

tedy $C = -6$.

Ze třetí rovnice

$$0 = 8(1) + 2(1) + 2(-6) + D = 8 + 2 - 12 + D = -2 + D,$$

odkud $D = 2$.

Ze čtvrté rovnice

$$-4 = 8(1) + 2(-6) + E = 8 - 12 + E = -4 + E,$$

tedy $E = 0$.

Rozklad (3) má tedy tvar

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x - 6}{x^2 + 2x + 2} + \frac{2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty), \\ \int \frac{x-6}{x^2+2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-12}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2-12}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{7}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|x^2+2x+2| dx - \int \frac{7}{1+(x+1)^2} dx \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - 7 \arctan(x+1), \\ \int \frac{2x}{(x^2+2x+2)^2} dx &= \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+2)^2} dx \\ &= \frac{-1}{(x^2+2x+2)} dx - \int \frac{2}{(1+(x+1)^2)^2} dx \\ &= -\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x+2} - \arctan(x+1). \end{aligned}$$

Poslední integrál jsme vyřešili pomocí substituce $y = (x+1)$ a pomocí vzorce z předchozí kapitoly $\int \frac{1}{(1+y^2)^2} \stackrel{c}{=} \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{\arctan y}{2}$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Po sečtení dostáváme, že na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ je primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\log|x| + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - 8 \arctan(x + 1) - \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Trigonometrické substituce

Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[x, y] \mapsto \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{0, \dots, n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Značení. Až do konce tohoto oddílu budeme symbolem R značit racionální funkci dvou proměnných.

Poznámka. Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad x \in I, \quad (5)$$

přičemž integrand je definován na intervalu I . Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít jednu z následujících substitucí.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x dx$.
2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x dx$.
3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $y = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$dx = \frac{1}{y^2 + 1} dy, \quad \sin^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{y}{1 + y^2} \quad (6)$$

4. Vždy lze užít substituci $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{2}{1 + y^2} dy, \quad \sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}. \quad (7)$$

5. Místo (3) lze užít i $y = \cot x$, je-li $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{-1}{y^2 + 1} dy, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{y}{1 + y^2} \quad (8)$$

6. Místo (4) lze užít i $y = \cot \frac{x}{2}$, je-li $x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{-2}{1 + y^2} dy, \quad \sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = -\frac{1 - y^2}{1 + y^2}. \quad (9)$$

konec 7. přednášky (11. 3. 2026)

Věta 2.9 (o lepení). *Nechť f, F jsou spojité funkce na otevřeném intervalu I , $c \in I$ a nechť $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I .*

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z věty o limitě derivací. □

Příklad. Spočtete $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$.

Řešení. Použijeme první větu o substituci (Věta ??) s $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Potom $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ je vlastní na (α, β) a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Jest

$$\sin^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}.$$

Jest dále $dx = \frac{1}{1+y^2} dy$. Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 + \frac{y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+2y^2} dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Podle první věty o substituci (s $f(y) = \frac{1}{1+2y^2}$, $y \in \mathbb{R}$) tedy platí

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c_k, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na \mathbb{R} , a tedy dle Věty ?? má na \mathbb{R} primitivní funkci. Položme

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c_k, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} F(x) + c_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} F(x) + c_1 = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_1.$$

Odtud $c_1 = c_0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Analogicky pak $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Tedy celkem $c_k = c_0 + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Položme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_0, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, c_0 \in \mathbb{R}.$$

Pak G je spojitá funkce na \mathbb{R} a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$. Díky Větě 2.9 tedy $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$ platí v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrály typu $R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Poznámka. Při integraci funkce $R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definována na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Pak

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \varphi(t),$$

příčemž $\varphi: (0, 1) \rightarrow (-\infty, -1)$ a $\varphi: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Jest

$$dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt, \quad t \in (0, 1) \quad \text{nebo } t \in (1, \infty).$$

Podle druhé věty o substituci dostaneme integrál

$$I = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} t \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} = -\frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1} - \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log |t + 1| - \log |t - 1| - 2 \arctan t, \quad t \in (0, 1) \quad \text{nebo } t \in (1, \infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \stackrel{c}{=} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty).$$

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Také integraci funkce $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechtě tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(x) = ax^2 + bx + c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α . Pak platí $q(x) = a(x - \alpha)^2$. Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{a}|x - \alpha|, \quad x \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2 . Potom slepíme F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I , která bude primitivní ke g na I .

(b) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme tyto kořeny α_1 a α_2 , přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I , který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

konec 8. přednášky (13. 3. 2026)

(c) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax}, \quad x \in I.$$

Pro $x \in I$ platí

$$\varphi'(x) = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(x) \neq 0$ pro každé $x \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{c - t^2}{2\sqrt{at} - b}, \quad t \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1} . Pro každé $t \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{-2\sqrt{at}^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{at} - b)^2}.$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(t))} = \sqrt{a \frac{c - t^2}{2\sqrt{at} - b}} + t$$

a

$$g \circ \varphi^{-1}(t) = R(\varphi^{-1}(t), \sqrt{q(\varphi^{-1}(t))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Je-li G její primitivní funkce na $\varphi(I)$, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g na I . Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t,$$

který se i lépe pamatuje.

Příklad. Spočtete $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

Řešení. Symbolem g označme integrand. Potom $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ a g je spojitá na $\mathcal{D}(g)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém \mathbb{R} , použijeme tedy substituci

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t.$$

Tedy

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}, \quad dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2} dt.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné t výraz $\sqrt{x^2 + x + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t-2)(2t-1)} dt.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2t^2 - 2t + 2) : (2t^2 - 5t + 2) = 1 + \frac{3t}{(t-2)(2t-1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t-2)(2t-1)} dt &= \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t-2} dt - \int \frac{1}{2t-1} dt \\ &\stackrel{c}{=} t + 2 \log |t-2| - \frac{1}{2} \log |2t-1| \end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2)$ a $(2, \infty)$. Podle Věty ?? má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2 \log |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$